Numerik - Tutorium

Anton Lammert

January 15, 2020

1 Info

Dies ist eine Sammlung der Tutoriumsmaterialien. Sie versucht ein Grundverständnis der Probleme sowie ihrer Lösungen zu vermitteln.
Für ihre Korrektheit und Vollständigkeit wird nicht garantiert!
In der Vorlesung und Übung werden weitere Themen besprochen, welche ebenfalls Klausurrelevant sind. Die Zusammenfassung ist somit kein Ersatz für die Vorlesung und Übung.

Fragen: **anton.benjamin.lammert@uni-weimar.de**

Termin: unregelmäßig Donnerstags 09:15 Uhr, HK7 Hörsaal

Im Laufe des Dokumentes befinden sich Links zu weiterführender Literatur. Es ist empfehlenswert diese zu nutzen. Ein eventuell hilfreiches Dokument kann **hier** gefunden werden.

Nur für den internen Gebrauch!

Contents

2 Grundlagen

Die Numerik beschäftigt sich mit der Analyse von Verfahren, welche näherungsweise Lösungen für Probleme berechnen. Hierbei ist von Bedeutung ob ein Verfahren numerisch stabil ist. Ein Verfahren ist dann numerisch stabil, wenn es gegenüber kleinen Störungen der Daten unempfindlich ist. Im Falle von Rechnungen auf dem Computer können diese Störungen z.B. durch Rundungen auftreten. Man unterscheidet zwischen numerischer Stabilität, Kondition, Konvergenz und Konsistenz. Eine genauere Erklärung zu letzteren kann **hier** gefunden werden.

2.1 Gleitkommazahlen

Eine Zahl $x \in \mathbb{R}$, kann wie folgt repräsentiert werden:

$$x = \pm 0, z_1, z_2, ..., z_n \cdot B^e, \quad z_1 \neq 0, z_i \in \{0, 1..., B-1\}$$

Hierbei ist B die Basis, e der Exponent und $0, z_1, ..., z_n$ die Mantisse.

Aufgrund von Speicherbegrenzungen ist die maximale Länge der Mantisse oftmals eingeschränkt. Soll eine Zahl, deren Mantisse länger wäre als die maximal erlaubte Länge, gespeichert werden, so wird die Zahl gerundet bevor sie mit der maximal erlaubten Mantissenlänge abgespeichert wird.

Bsp:
Auf dem Computer wird für jede Zahl eine Mantisse der Länge 3 reserviert. Die Zahlen $x = 0,123 \cdot 10^0, y = 0,456 \cdot 10^{-3}$ können folglich abgespeichert werden.
Sei $z = x + y = 0,123456 \cdot 10^0$, so kann z nicht komplett auf dem Computer gespeichert werden, da die Mantisse nur die Länge 3 besitzen darf.

2.2 Rundung

Aufgrund von Rundungen, kann es zu einer Axiom-Verletzung kommen.
Bsp:

$$\text{Sei } y \neq 0, \quad \text{rnd}(x+y) = x, \text{ wobei rnd}(x), \text{ der gerundete Wert von } x \text{ ist.}$$

Es gibt weiterhin verschiedene Möglichkeiten des Rundens, welche verschiedene Ergebnisse erzeugen können.

2.2.1 Symmetrisches Runden

Ist x eine Zahl, deren Mantisse nicht komplett gespeichert werden kann, so wird x zuerst auf die letzte Stelle gerundet, welche in der Mantisse gespeichert werden kann. Anschließend wird x gespeichert.

Bsp:
Sei $x = 0,122544 \cdot 10^0$ und die maximale Länge der Mantisse 3, so wird x zuerst auf 3 Stellen nach dem Komma gerundet.

$$z = \text{rnd}_{\text{sym.}}(x) = 0,123$$

Anschließed wird die so entstandene Zahl z gespeichert.

2.2.2 Unsymmetrisches Runden

Ist x eine Zahl, deren Mantisse nicht komplett gespeichert werden kann und l die maximale Länge der Mantisse, so werden nur die ersten l Werte der Mantisse übernommen und abgespeichert.

Bsp:
Sei $x = 0,122544 \cdot 10^0$ und die maximale Länge der Mantisse 3, so werden nur die ersten 3 Werte der Mantisse von x übernommen.

$$z = \text{rnd}_{\text{unsym.}}(x) = 0,122$$

2.3 Absoluter und relativer Fehler

Sei x der wirkliche Wert, $\tilde{x}$ der numerische Wert und $\delta x = x - \tilde{x}$ die Störung zwischen dem wirklichen Wert und dem numerischen Wert, so gilt:

$$\text{Absoluter Fehler: } |x - \tilde{x}| = |\delta x|$$

$$\text{Relativer Fehler: } \left|\frac{x - \tilde{x}}{x}\right| = \left|\frac{\delta x}{x}\right|$$

Oftmals ist die Untersuchung des relativen Fehlers relevant, da er eine Aussage darüber gibt, wie stark sich der numerische Wert vom wirklichen Wert im Bezug auf diesen unterscheidet.

Bsp:
Sei $x = 5, \tilde{x} = 5,1$, so gilt:
Absoluter Fehler: $|5 - 5,1| = 0,1$, Relativer Fehler: $\left|\frac{5-5,1}{5}\right| = 0,02$

Sei $x = 1000000, \tilde{x} = 1000000,1$, so gilt:
Absoluter Fehler: $|1000000 - 1000000,1| = 0,1$, Relativer Fehler: $\left|\frac{1000000-1000000,1}{1000000}\right| = 1 \cdot 10^{-7}$

Es ist deutlich, dass der absolute Fehler bei beiden Beispielen identisch ist. Dennoch ist die prozentuale Abweichung zwischen dem wirklichen und dem numerischen Wert im zweiten Beispiel um ein vielfaches geringer. Eine Aussage über die prozentuale Abweichung vom wirklichen Wert kann jedoch durch den relativen Fehler getroffen werden.

3 Relative Konditionszahlen

Relative Konditionszahlen sind ein Maß dafür, wie sehr sich relative Fehler in den Eingabedaten auf den relativen Fehler des Ergebnisses auswirken.

Bsp:

$$\frac{\delta z}{z} = A \cdot \frac{\delta x}{x}$$

Hierbei ist A die relative Konditionszahl, welche angibt wie sehr sich ein relativer Fehler in der Eingabegröße x auf den relativen Fehler des Ergebnisses z auswirkt.

Weiterführende Literatur kann **hier** gefunden werden.

3.1 Addition, Subtraktion

Seien $x, y \in \mathbb{R}$ die wirklichen Werte und $\tilde{x}, \tilde{y}$ die numerischen Werte von x und y. Sei $z = x \pm y$, das Ergebnis der Addition/Subtraktion der wirklichen Werte und $\tilde{z} = \tilde{x} \pm \tilde{y}$ das Ergebnis der Addition/Subtraktion der numerischen Werte. Wir würden gerne wissen wie der relative Fehler in dem Ergebnis durch die relativen Fehler der Eingabewerte beeinflusst wird.

$$\Rightarrow \left|\frac{z - \tilde{z}}{z}\right| = \left|\frac{x \pm y - (\tilde{x} \pm \tilde{y})}{x \pm y}\right|$$

$$\Rightarrow \left|\frac{\delta z}{z}\right| = \left|\frac{\delta x \pm \delta y}{x \pm y}\right| = \left|\frac{\delta x}{x \pm y} \pm \frac{\delta y}{x \pm y}\right|$$

$$= \left|\frac{x \pm y}{x} \cdot \frac{x}{x \pm y} \cdot \frac{\delta x}{x \pm y} \pm \frac{x \pm y}{y} \cdot \frac{y}{x \pm y} \cdot \frac{\delta y}{x \pm y}\right|$$

$$= \left|\underbrace{\frac{x}{x \pm y}}_{\text{rel. Kond.}} \cdot \frac{\delta x}{x} \pm \underbrace{\frac{y}{x \pm y}}_{\text{rel. Kond.}} \cdot \frac{\delta y}{y}\right|$$

Die relativen Konditionszahlen für die Addition/Subtraktion sind folglich $\frac{x}{x \pm y}$ für $\frac{\delta x}{x}$ und $\frac{y}{x \pm y}$ für $\frac{\delta y}{x \pm y}$.

Wenn $x \pm y << x$ bzw. $x \pm y << y$, so kann die relative Konditionszahl sehr groß werden und ein kleiner Fehler in den Eingabewerten zu einem großen Fehler in den Ausgabewerten führen.

3.2 Multiplikation, Division

Seien $x, y \in \mathbb{R}$ die wirklichen Werte und $\tilde{x}, \tilde{y}$ die numerischen Werte von x und y. Sei $z = x \cdot y$, das Ergebnis der Multiplikation der wirklichen Werte und $\tilde{z} = \tilde{x} \cdot \tilde{y}$ das Ergebnis der Multiplikation der numerischen Werte. Wir würden gerne wissen wie der relative Fehler in dem Ergebnis durch die relativen Fehler der Eingabewerte beeinflusst wird.

$$\Rightarrow \left|\frac{\delta z}{z}\right| = \left|\frac{\tilde{x} \cdot \tilde{y} - x \cdot y}{x \cdot y}\right| = \left|\frac{(x + \delta x) \cdot (y + \delta y) - x \cdot y}{x \cdot y}\right|$$

$$= \left|\frac{x \cdot y + \delta x \cdot y + \delta y \cdot x + \delta x \cdot \delta y - x \cdot y}{x \cdot y}\right| = \left|\frac{\delta x \cdot y + \delta y \cdot x + \delta x \cdot \delta y}{x \cdot y}\right|$$

Da $\delta x, \delta y$ oftmals verhältnismäßig klein sind kann der Term $\delta x \cdot \delta y$ vernachlässigt werden.

$$\approx \left|\frac{\delta x \cdot y}{x \cdot y} + \frac{\delta y \cdot x}{x \cdot y}\right| = \left|1 \cdot \frac{\delta x}{x} + 1 \cdot \frac{\delta y}{y}\right|$$

Die relativen Konditionszahlen für die Multiplikation sind folglich immer gleich 1.

Sei $z = \frac{x}{y}$, das Ergebnis der Division der wirklichen Werte und $\tilde{z} = \frac{\tilde{x}}{\tilde{y}}$ das Ergebnis der Division der numerischen Werte. Wir würden gerne wissen wie der relative Fehler in dem Ergebnis durch die relativen Fehler der Eingabewerte beeinflusst wird.

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \left|\frac{\delta z}{z}\right| &= \left|\frac{\frac{\tilde{x}}{\tilde{y}} - \frac{x}{y}}{\frac{x}{y}}\right| = \left|\frac{\frac{x+\delta x}{y+\delta y} - \frac{x}{y}}{\frac{x}{y}}\right| \\
&= \left|\frac{\frac{x+\delta x}{y+\delta y} \cdot \frac{y}{y} - \frac{x}{y} \cdot \frac{y+\delta y}{y+\delta y}}{\frac{x}{y}}\right| = \left|\frac{\frac{x\cdot y+\delta x\cdot y}{y^2+\delta y\cdot y} - \frac{x\cdot y+\delta y\cdot x}{y^2+\delta y\cdot y}}{\frac{x}{y}}\right| \\
&= \left|\frac{\frac{x\cdot y+\delta x\cdot y-x\cdot y-\delta y\cdot x}{y^2+\delta y\cdot y}}{\frac{x}{y}}\right| = \left|\frac{\frac{\delta x\cdot y-\delta y\cdot x}{y^2+\delta y\cdot y}}{\frac{x}{y}}\right| \approx \left|\frac{\frac{\delta x\cdot y-\delta y\cdot x}{y^2}}{\frac{x}{y}}\right| \\
&= \left|\frac{\frac{\delta x\cdot y}{y^2} - \frac{\delta y\cdot x}{y^2}}{\frac{x}{y}}\right| = \left|\frac{\frac{\delta x}{y} - \frac{\delta y\cdot x}{y^2}}{\frac{x}{y}}\right| = \left|\frac{y}{x} \cdot \frac{\delta x}{y} - \frac{y}{x} \cdot \frac{\delta y \cdot x}{y^2}\right| \\
&= \left|\frac{\delta x}{x} - \frac{\delta y}{y}\right|
\end{aligned}
$$

Die relativen Konditionszahlen für die Division sind folglich immer gleich 1.

3.3 Funktionen

Oftmals müssen in der Mathematik Funktionen mehrerer Veränderlicher berechnet werden. Hierbei können alle Variablen durch numerische Fehler dazu führen, dass das Ergebnis beeinflusst wird. Es ist folglich notwendig zu untersuchen, wie stark sich welche Variablen auf den relativen Fehler im Ergebnis auswirken.

Sei $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ eine Funktion mehrerer Veränderlicher.
Wir definieren die partielle Ableitung von f nach x_i wie folgt:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} := \lim_{h\to 0} \frac{f(x_1, ..., x_i + h, ..., x_n) - f(x_1, ..., x_i, ..., x_n)}{h}$$

Seien die Variablen nun Fehlerbehaftet, so ist der numerische Wert:

$$\tilde{y} = f(x_1 + \delta x_1, ..., x_n + \delta x_n)$$
$$\delta y = \tilde{y} - y = f(x_1 + \delta x_1, x_2 + \delta x_2, ..., x_n + \delta x_n) - f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

Wir können δy auch wie folgt darstellen:

$$
\begin{gathered}
\delta y = f(x_1 + \delta x_1, x_2 + \delta x_2, ..., x_n + \delta x_n) \\
-f(x_1, x_2 + \delta x_2, ..., x_n + \delta x_n) + f(x_1, x_2 + \delta x_2, ..., x_n + \delta x_n) \\
-f(x_1, x_2, x_3 + \delta x_3 ..., x_n + \delta x_n) + f(x_1, x_2, x_3 + \delta x_3, ..., x_n + \delta x_n) \\
\vdots \\
-f(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n + \delta x_n) + f(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n + \delta x_n) \\
-f(x_1, x_2, ..., x_n)
\end{gathered}
$$

Wir wissen:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \approx \frac{f(x_1 + \delta x_1, x_2 + \delta x_2, ..., x_n + \delta x_n) - f(x_1, x_2 + \delta x_2, ..., x_n + \delta x_n)}{\delta x_1}$$

Dies liegt daran, dass sich die Eingabewerte für f nur im Wert für x_1 unterscheiden (h wird zu δx_1).

Da δx_1 oft sehr klein ist, können wir $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)$ folglich dementsprechend approximieren.

Es folgt:

$$\begin{aligned}
\delta y &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \cdot \delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \cdot x_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \cdot \delta x_n \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot \delta x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot \frac{\delta x_i}{x_i} \\
\Rightarrow \frac{\delta y}{y} &= \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\frac{x_i}{f(x)} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)}_{\text{rel. Kond.}} \cdot \frac{\delta x_i}{x_i}
\end{aligned}$$

Die relative Konditionszahl für die Variable x_i ist folglich: $\frac{x_i}{f(x)} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$.

Sei eine Funktion $y = f(x)$ nur von einer Variable abhängig, so folgt:

$$\frac{\delta y}{y} = \underbrace{\frac{x}{f(x)} \cdot f'(x)}_{\text{rel. Kond.}} \cdot \frac{\delta x}{x}$$

Dementsprechend ist die relative Konditionszahl in diesem Fall $\frac{x}{f(x)} \cdot f'(x)$.

Es kann sein, dass die relative Konditionszahl abhängig vom Wert für x gegen unendlich geht. Ist dies der Fall, so ist die Funktion für diesen Wert x schlecht konditioniert.

3.3.1 Beispielaufgaben

Berechnen sie die folgenden partiellen Ableitungen der Funktion $f(x, y, z) = 5 + x^3 \cdot \frac{y}{z+5}$.
Gesucht: $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}$

Berechnen Sie die relativen Konditionszahlen für die folgenden Funktionen:

$f(x) = x^2$
$f(x, y) = x + y$
$f(x, y) = 1 - \sqrt{1 - x} + y$

Für welche Eingabewerte sind die Funktionen schlecht konditioniert?

3.4 Lineare Gleichungssysteme

Da in der Informatik häufig lineare Gleichungssysteme verwendet werden, ist es wichtig zu wissen ob die Ergebnisse der Berechnungen am Computer stark von den wirklichen Werten abweichen oder nicht. Aus diesem Grund ist es relevant die Kondition von linearen Gleichungssystemen zu untersuchen. Hierfür ist es wichtig Normen für Matrizen und Vektoren zu definieren und deren Verträglichkeit miteinander zu untersuchen.

3.4.1 Matrix-Normen

Euklidische Norm:
Sei $A \in \mathbb{R}^{m,n}$, so ist die Euklidische Norm wie folgt definiert:

$$\|A\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{i,j}^2}$$

Sei $x \in \mathbb{R}^n$ ein Spaltenvektor, so wird gefordert, dass die Matrix- und Vektor-Norm kompatibel sind bzw. das:

$$\|A \cdot x\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$$

Neben der Euklidischen Norm gibt es viele weitere Normen wie z.B. die Zeilensummen-, Spaltensummen oder Nukleare-Norm.

3.4.2 Gestörte Probleme

Sei $A \cdot x = b$ das ungestörte Problem, mit $A \in \mathbb{R}^{n,n}, x \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^n$ und existiere A^{-1}. Wir können das gestörte Problem wie folgt beschreiben:

$$(A + \delta A) \cdot (x + \delta x) = b + \delta b$$

$$\begin{gathered}
\Rightarrow A \cdot x + A \cdot \delta x + \delta A \cdot x + \delta A \cdot \delta x = A \cdot x + \delta b \\
\Rightarrow A \cdot \delta x + \delta A \cdot x + \delta A \cdot \delta x = \delta b \\
\Rightarrow A \cdot \delta x + \delta A \cdot \delta x = \delta b - \delta A \cdot x \\
\Rightarrow A \cdot (I + A^{-1}\delta A) \cdot \delta x = \delta b - \delta A \cdot x \\
\Rightarrow \delta x = (I + A^{-1} \cdot \delta A)^{-1} \cdot A^{-1} \cdot (\delta b - \delta A \cdot x) \\
\Rightarrow \|\delta x\| \leq \left\|(I + A^{-1} \cdot \delta A)^{-1}\right\| \cdot \left\|A^{-1}\right\| \cdot (\|\delta b\| + \|\delta A\| \cdot \|x\|) \\
\Rightarrow \frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \left\|(I + A^{-1} \cdot \delta A)^{-1}\right\| \cdot \left\|A^{-1}\right\| \cdot \left(\frac{\|\delta b\|}{\|x\|} + \|\delta A\|\right)
\end{gathered}$$

Durch den Satz von Banach ergibt sich:

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A\| \cdot \left\|A^{-1}\right\|}{1 - \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \cdot \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}} \cdot \left(\frac{\|\delta b\|}{\|b\|} + \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}\right)$$

Es ist deutlich, dass dieser Term maßgeblich von $\|A\| \cdot \left\|A^{-1}\right\|$ beeinflusst wird. Aus diesem Grund bezeichnen wir $\|A\| \cdot \left\|A^{-1}\right\|$ als die relative Konditionszahl der Matrix A.

Beispielaufgabe:

Sei $A = \begin{bmatrix} 10^{-9} & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Bestimmen Sie die relative Konditionszahl der Matrix A. Wie wirkt sich ein Fehler in b auf das Ergebnis aus?

4 Taylorpolynom

Die Taylor Entwicklung erlaubt es euch, durch bekannte Werte der Ableitungen einer Funktion $f(x)$ an einem festen Punkt x_0 eine Approximation der Funktion $f(x)$ durch ein Polynom zu berechnen. Ein interessantes Video hierzu kann **hier** und eine interessante interaktive Visualisierung **hier** oder **hier** gefunden werden.

4.1 Definition

Das n-te Taylorpolynom an der Stelle x_0 ist gegeben durch:

- Taylor-Polynom-Formel: $T_{x_0,n}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0) \cdot (x - x_0)^k}{k!}$
- Taylor-Restglied-Formel: $R_{x_0,n}(x) = f(x) - T_{n-1}(x) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}$

Anmerkung: Das Taylorpolynom wird unter anderem verwendet um den Zusammenhang zwischen den Differenzen/Steigungen n-ter Ordnung und den Ableitungen einer Funktion zu beweisen und spielt weiterhin bei der Fehlerabschätzung von Interpolationen, sowie der Numerischen Differentation eine Rolle. Es ist wichtig das Taylorpolynom zu verstehen und anwenden zu können, da es eine grundlegende Rolle in der Numerik spielt!

5 Interpolation

Sie $f(x)$ eine Funktion, von welcher (Funktions-)werte an den Stützstellen x_i bekannt sind. Anhand der bekannten Werte, ist es das Ziel der Interpolation eine Funktion $I(x)$ zu finden, welche an den Stützstellen die bekannten Werte besitzt. Weiterhin wird häufig gefordert, dass der Grad von $I(x)$ minimal ist.

5.1 Lagrange

Seien Punkte an den Stellen $x_i \in [a, b]$, mit $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$ bekannt.

$$\text{Sei } y_i = f(x_i) \text{ und}$$

$$\omega_i(x) = \frac{(x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot ... \cdot (x - x_{i-1}) \cdot (x - x_{i+1}) \cdot ... \cdot (x - x_n)}{(x_i - x_0) \cdot (x_i - x_1) \cdot ... \cdot (x_i - x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i+1}) \cdot ... \cdot (x_i - x_n)}$$

$$\text{es gilt } \omega_i(x) = \begin{cases} 1 & x = x_i \\ 0 & x \neq x_i \end{cases},$$

so ist die Lagrange-Interpolation gegeben durch den Term:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot \omega_i(x)$$

Bemerkung:
Wird eine neue Stützstelle hinzugenommen müssen alle Terme $\omega_i(x)$ erneut bestimmt werden.

5.2 Newton

Das Newton-Polynom folgt einem ähnlichen Ansatz wie die Lagrange-Interpolation, jedoch ist es hierbei einfacher zusätzliche Punkte hinzuzufügen. Das Newton-Polynom wird wie folgt bestimmt:

$$N_n(x) = c_0 + c_1 \cdot \underbrace{(x - x_0)}_{b_1(x)} + c_2 \cdot \underbrace{(x - x_0) \cdot (x - x_1)}_{b_2(x)} + \ldots + c_n \cdot \underbrace{(x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_{n-1})}_{b_n(x)}$$

Die Parameter c_i werden nach folgenden Forderungen bestimmt:

$$\begin{aligned} N_n(x_0) &= c_0 \\ N_n(x_1) &= c_0 + c_1 \cdot b_1(x) \\ N_n(x_2) &= c_0 + c_1 \cdot b_1(x) + c_2 \cdot b_2(x) \\ &\vdots \\ N_n(x_n) &= c_0 + c_1 \cdot b_1(x) + c_2 \cdot b_2(x) + ... + c_n \cdot b_n(x) \end{aligned}$$

Es ist klar, dass für $i < j : b_j(x_i) = 0$.

Wird eine neue Stützstelle x_{n+1} hinzugefügt, so muss nur der Term

$$c_{n+1} \cdot \underbrace{(x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_{n-1}) \cdot (x - x_n)}_{b_{n+1}}$$

bestimmt und auf das vorhandene Newton-Polynom addiert werden. Aus diesem Grund ist das Newton-Polynom leichter um Stützstellen erweiterbar als das Lagrange-Polynom.

Anmerkung: Die Interpolation durch Newton und Lagrange ergibt das gleich Polynom.

Es ist möglich die Faktoren c_i des Newton-Polynoms durch das Lösen eines Gleichungssystems in Matrixform zu bestimmen. Hierfür können wir das Newton-Polynom wie folgt darstellen:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & b_1(x_1) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & b_1(x_2) & b_2(x_2) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & b_1(x_n) & b_2(x_n) & \dots & \dots & b_n(x_n) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{n-1}) \end{bmatrix}$$

Da die Werte x_i sowie $f(x_i)$ bekannt sind, können die Werte c_i einfach bestimmt werden. Weiterhin muss die Matrix sowie die Vektoren bei der Hinzunahme einer neuen Stützstelle nur um eine Zeile erweitert werden.

5.2.1 Steigung

Sei $[x_i] = y_i$, so bezeichnet man

$$[x_i, x_{i+1}] = \frac{[x_{i+1}] - [x_i]}{x_{i+1} - x_i}$$

als Steigung erster Ordnung und

$$[x_i, x_{i+1}, ..., x_{i+r}] = \frac{[x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+r}] - [x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+r-1}]}{x_{i+r} - x_i}$$

als Steigung r-ter Ordnung.

Es gilt:

$$[x_0, x_1, ..., x_r] = c_r = \frac{f^r(\xi)}{r!}, \xi \in [x_0, x_r]$$

, wobei c_r ein Faktor des Newton-Polynoms ist.

Anmerkung: Die Herleitung warum $[x_0, x_1, ..., x_r] = c_r = \dfrac{f^r(\xi)}{r!}, \xi \in [x_0, x_r]$ gilt ist recht simpel und basiert auf dem Taylorpolynom. Ihr solltet in der Lage sein den Beweis alleine zu führen und auch zu erklären. Da die Herleitung in der Übung durchgeführt wird befindet sie sich nicht auf den Tutoriums-Folien.

5.3 Fehlerabschätzung Lagrange + Newton

Sei $f(x)$ die ursprüngliche Funktion und $L_n(x)$ das Lagrange-Polynom bzw. das Newton-Polynom, welches durch n Stützpunkte x_i bestimmt wurde. Es ist klar, dass $\forall i : f(x_i) = L_n(x_i)$.
Dies liegt daran, dass $L_n(x)$ durch alle bekannten Punkte geht.

Sei $\bar{x} \neq x_i$, so ist die Frage wie groß der Term $f(\bar{x}) - L_n(\bar{x})$ werden kann.

Sei $N_{n+1}(x) = N_n(x) + c_{n+1} \cdot b_{n+1}$ das Newton-Polynom unter Hinzunahme der neuen Stützstelle $\bar{x}$.

Wir wissen, dass $c_{n+1} = [x_0, x_1, ..., x_n, \bar{x}] = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}, \xi \in [x_0, x_n]$

$$f(\bar{x}) = N_n(\bar{x}) + c_{n+1} \cdot b_{n+1}$$
$$\Rightarrow f(\bar{x}) - N_n(\bar{x}) = c_{n+1} \cdot b_{n+1}$$
$$\Rightarrow |f(\bar{x}) - N_n(\bar{x})| \leq \underbrace{\frac{1}{(n+1)!} \cdot \max |f^{n+1}(\xi)| \cdot |b_{n+1}(\bar{x})|}_{\text{Fehler}}, \quad \xi \in [x_0, x_n]$$

Frage:
Wie viele Stützstellen müssen mindestens verwendet werden, damit der Fehler maximal einen gewissen Wert erreicht?

$\Rightarrow$ Abschätzung von $|b_{n+1}(x)|$ und $\frac{1}{(n+1)!} \cdot \max\limits_{[x_0, x_n]} |f^{n+1}(x)|$

$|b_{n+1}(x)|$ kann unterschiedlich abgeschätzt werden. Der Term hängt prinzipiell davon ab wie die bekannten Stützstellen x_i im Intervall $[a, b]$ verteilt sind.

Sind die Stützstellen im Intervall $[a, b]$ gleichverteilt, so gilt:

$$|b_{n+1}(x)| \leq n! \cdot h^n, \quad h = \left|\frac{b-a}{n}\right|$$

5.4 Hermite

Bei der Hermite-Interpolation sind neben den Funktionswerten der Stützstellen für diese ebenfalls die Werte der ersten Ableitung gegeben. Es wird das Polynom $H(x)$ mit minimalem Grad gesucht, für welches die gegeben Funktionswerte an den Stützstellen mit den Funktionswerten des Polynoms an den Stützstellen übereinstimmen und zusätzlich ebenfalls die gegeben Werte der ersten Ableitung an den Stützstellen mit den Werten der ersten Ableitung des Polynoms an den Stützstellen übereinstimmt.

Seien x_i die Stützstellen, mit $x_i \neq x_j$ wenn $i \neq j$, so sind die Funktionswerte $f(x_i)$ sowie die Werte der ersten Ableitung an den Stützstellen $f^{'}(x_i)$ bekannt.

Gesucht: Polynom $H_{2n+1}(x)$ für welches gilt:

$$\forall i : H_{2n+1}(x_i) = f(x_i) \text{ und } \forall i : H^{'}_{2n+1}(x_i) = f^{'}(x_i)$$

Die Idee hinter dem Hermite-Interpolation besteht darin Basispolynome zu bestimmen, welche gewisse Eigenschaften erfüllen, um durch diese das Polynom $H_{2n+1}(x)$ "zusammenzubauen".

Gesucht sind die Basispolynome $H_{n,j}(x)$ und $\widetilde{H}_{n,j}(x)$ mit den folgenden Eigenschaften:

$$\begin{cases} H_{n,j}(x_k) = \begin{cases} 0 & j \neq k \\ 1 & j = k \end{cases} \\ H^{'}_{n,k}(x_k) = 0 \ \forall k \end{cases}$$

Die Idee hinter den Forderungen an $H_{n,j}(x)$ besteht darin, dass wir ähnlich wie bei der Lagrange-Interpolation vorgehen wollen. Sei $G(x) = \sum\limits_{j=0}^{n} f(x_j) \cdot H_{n,j}(x)$, so gilt für das Polynom $G(x)$:

$$\forall i : G(x_i) = f(x_i) \text{ und } \forall i : G(x_i) = 0.$$

Das Polynom $G(x)$ besitzt an den Stützstellen die gleichen Funktionswerte wie die ursprüngliche Funktion $f(x)$. Weiterhin ist sind die Werte der ersten Ableitung von $G(x)$ an den Stützstellen gleich 0.

Für $\widetilde{H}_{n,j}(x)$ stellen wir die folgenden Forderungen auf:

$$\begin{cases} \widetilde{H}_{n,k}(x_k) = 0 \ \forall k \\ \widetilde{H}^{'}_{n,j}(x_k) = \begin{cases} 0 & j \neq k \\ 1 & j = k \end{cases} \end{cases}$$

Die Idee hinter den Forderungen an $\widetilde{H}_{n,j}(x)$ besteht darin, dass wir ein Polynom $P(x)$ erstellen wollen, für welches in allen Stützstellen den Funktionswert 0 besitzt und deren Werte der ersten Ableitung in den Stützstellen mit den Werten der ersten Ableitung der ursprünglichen Funktion in den Stützstellen übereinstimmen. Sei $P(x) = \sum\limits_{j=0}^{n} f^{'}(x) \cdot \widetilde{H}_{n,j}(x)$, so gilt für das Polynom $P(x)$:

$$\forall i : P(x_i) = 0 \text{ und } \forall i : P^{'}(x_i) = f^{'}(x_i).$$

Sei $H_{2n+1}(x) = G(x)+P(x)$ ein Polynom vom Grad $2n+1$, wobei $n+1$ die Anzahl der Stützstellen ist, so gilt offensichtlich:

$$\forall i : H_{2n+1}(x_i) = f(x_i) \text{ und } \forall i : H'_{2n+1}(x_i) = f'(x_i).$$

Das Polynom $H_{2n+1}(x)$ erfüllt also die Anforderungen die wir anfangs für das Interpolationsproblem festgelegt haben.

Es stellt sich die Frage wie genau die Polynome $H_{n,j}(x)$ und $\widetilde{H}_{n,j}(x)$ bestimmt werden können. Hierfür wird ähnlich wie beim Newton-Polynom vorgegangen und es wird direkt das Polynom $H_{2n+1}(x)$ bestimmt.

Vorgehensweise:

gegeben: $n = 2$

x_i	x_0	x_1	x_2
$f(x_i)$	a	b	c
$f'(x_i)$	a'	b'	c'

gesucht: $H_{2n+1}(x)$, mit Grad $2n+1$ bzw. in diesem Beispiel 5

$$\begin{gathered} H_{2n+1}(x) = \\ \boldsymbol{c_0} + \boldsymbol{c_1} \cdot (x - x_0) + \\ \boldsymbol{c_2} \cdot (x - x_0)^2 + \boldsymbol{c_3} \cdot (x - x_0)^2 \cdot (x - x_1) + \\ \boldsymbol{c_4} \cdot (x - x_0)^2 \cdot (x - x_1)^2 + \boldsymbol{c_5} \cdot (x - x_0)^2 \cdot (x - x_1)^2 \cdot (x - x_2) \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} H'_{2n+1}(x) = \\ \boldsymbol{c_1} + \\ \boldsymbol{c_2} \cdot 2 \cdot (x - x_0) + \boldsymbol{c_3} \cdot \big(2 \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) + (x - x_0)^2\big) + \\ \boldsymbol{c_4} \cdot \big(2 \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1)^2 + (x - x_0)^2 \cdot 2 \cdot (x - x_1)\big) + \\ \boldsymbol{c_5} \cdot \Big(\big(2 \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1)^2 + (x - x_0)^2 \cdot 2 \cdot (x - x_1)\big) \cdot (x - x_2) + (x - x_0)^2 \cdot (x - x_1)^2\Big) \end{gathered}$$

Die Idee hinter den Werten für c_i ist, dass wir sie nacheinander nach unseren Anforderungen bestimmen können.

Forderung 1: $H_{2n+1}(x_0) = a$
Es folgt: $H_{2n+1}(x_0) = \boldsymbol{c_0}$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{c_0} = a$$

Forderung 2: $H'_{2n+1}(x_0) = a'$
Es folgt: $H'_{2n+1}(x_0) = \boldsymbol{c_1}$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{c_1} = a'$$

Forderung 3: $H_{2n+1}(x_1) = b$
Es folgt: $H_{2n+1}(x_1) = \boldsymbol{c_0} + \boldsymbol{c_1} \cdot (x_1 - x_0) + \boldsymbol{c_2} \cdot (x_1 - x_0)^2$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{c_2} = \frac{b - \boldsymbol{c_0} - \boldsymbol{c_1} \cdot (x_1 - x_0)}{(x_1 - x_0)^2}$$

Forderung 4: $H'_{2n+1}(x_1) = b'$
Es folgt: $H'_{2n+1}(x_1) = \boldsymbol{c_1} + \boldsymbol{c_2} \cdot 2 \cdot (x_1 - x_0) + \boldsymbol{c_3} \cdot \big(2 \cdot (x_1 - x_0) \cdot (x_1 - x_1) + (x_1 - x_0)^2\big)$

$$\Rightarrow \boldsymbol{c_3} = \frac{b' - \boldsymbol{c_1} - \boldsymbol{c_2} \cdot 2 \cdot (x_1 - x_0)}{(x_1 - x_0)^2}$$

Forderung 5: $H_{2n+1}(x_2) = c$
Es folgt: $H_{2n+1}(x_2) = \boldsymbol{c_0} + \boldsymbol{c_1} \cdot (x_2 - x_0) + \boldsymbol{c_2} \cdot (x_2 - x_0)^2 + \boldsymbol{c_3} \cdot (x_2 - x_0)^2 \cdot (x_2 - x_1)$
$+\boldsymbol{c_4} \cdot (x_2 - x_0)^2 \cdot (x_2 - x_1)^2$

$$\Rightarrow \boldsymbol{c_4} = \frac{c - \boldsymbol{c_0} - \boldsymbol{c_1} \cdot (x_2 - x_0) - \boldsymbol{c_2} \cdot (x_2 - x_0)^2 - \boldsymbol{c_3} \cdot (x_2 - x_0)^2 \cdot (x_2 - x_1)}{(x_2 - x_0)^2 \cdot (x_2 - x_1)^2}$$

Forderung 6: $H^{'}_{2n+1}(x_2) = c^{'}$

Es folgt:

$$\begin{aligned} H^{'}_{2n+1}(x_2) = {} & \boldsymbol{c_1} + \boldsymbol{c_2} \cdot 2 \cdot (x_2 - x_0) + \boldsymbol{c_3} \cdot \big(2 \cdot (x_2 - x_0) \cdot (x_2 - x_1) + (x_2 - x_0)^2\big) \\ & + \boldsymbol{c_4} \cdot \big(2 \cdot (x_2 - x_0) \cdot (x_2 - x_1)^2 + (x_2 - x_0)^2 \cdot 2 \cdot (x_2 - x_1)\big) \\ & + \boldsymbol{c_5} \cdot \big(\big(2 \cdot (x_2 - x_0) \cdot (x_2 - x_1)^2 + (x_2 - x_0)^2 \cdot 2 \cdot (x_2 - x_1)\big) \cdot (x_2 - x_2) + (x_2 - x_0)^2 \cdot (x_2 - x_1)^2\big) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{c_5} = \frac{c^{'} - \boldsymbol{c_1} - \boldsymbol{c_2} \cdot 2 \cdot (x_2 - x_0) - \boldsymbol{c_3} \cdot (2 \cdot (x_2 - x_0) \cdot (x_2 - x_1) + (x_2 - x_0)^2) - \boldsymbol{c_4} \cdot (2 \cdot (x_2 - x_0) \cdot (x_2 - x_1)^2 + (x_2 - x_0)^2 \cdot 2 \cdot (x_2 - x_1)))}{((2 \cdot (x_2 - x_0) \cdot (x_2 - x_1)^2 + (x_2 - x_0)^2 \cdot 2 \cdot (x_2 - x_1)) \cdot (x_2 - x_2) + (x_2 - x_0)^2 \cdot (x_2 - x_1)^2)}$$

Anmerkung: Wird x_i in das Polynom $H_{2n+1}(x)$ eingesetzt, so werden alle Terme, die den Term $(x - x_i)$ beinhalten gleich 0. Hierdurch können wir die Faktoren c_i durch unsere Forderungen bestimmen.

Anmerkung; Sind bestimmte Ableitungen unbekannt (z.B. $a^{'}$), so kann die Hermite-Interpolation dennoch genutzt werden. Hierfür wird das Polynom wie in der Übung behandelt verändert.

6 Spline Interpolation

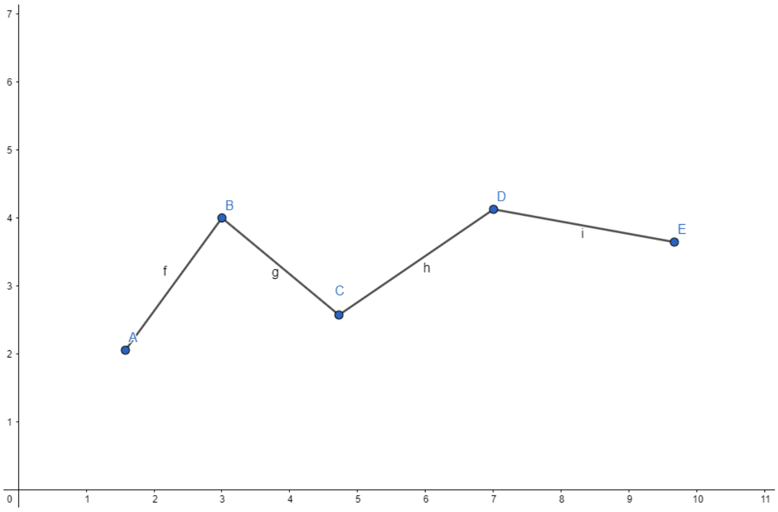
Da bei der Lagrange- bzw. Newton- und Hermite-Interpolation der Grad des Polynoms von der Anzahl der Stützstellen abhängt, kann es bei vielen Stützstellen schnell dazu kommen, dass das Polynom einen sehr hohen Grad besitzt. Dies kann dazu führen, dass es zwischen den Stützstellen zu sehr starken "Auslenkungen" kommt. In vielen Fällen sind diese Auslenkungen jedoch unerwünscht. Aus diesem Grund wird häufig eine zusammengesetzte Funktion gesucht, welche durch die Funktionswerte an den Stützstellen geht und deren Funktionen in ihrem maximaler Grad beschränkt sind.

Sei $S(x)$ eine Splinefunktion vom Grad k, so kann sie durch eine Menge an Funktionen $S_i(x)$, welche alle maximal den Grad k besitzen, wie folgt beschrieben werden:

$$S(x) = \begin{cases} S_1(x) & x \in [x_1, x_2] \\ S_2(x) & x \in (x_2, x_3] \\ \vdots & \\ S_n(x) & x \in (x_n, x_{n+1}] \end{cases}$$

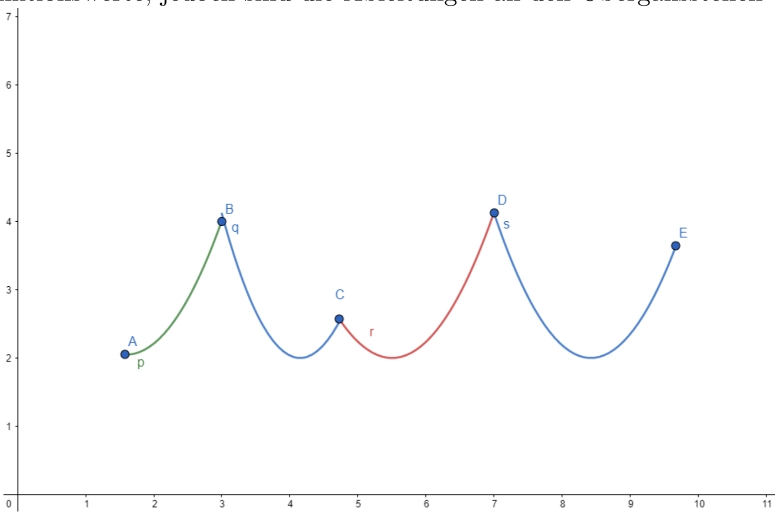
Für die Definition einer Spline-Interpolation wird der Grad k, sowie der Defekt r definiert. Der Grad k gibt den maximalen Grad der Teilfunktion $S_i(x)$ an. Der Term $k - r$ gibt an, für wie viele Ableitungen die angrenzenden Teilfunktionen an der Stützstelle, an welcher sie ineinander übergehen, übereinstimmen.

Sei der Grad $k = 2$ und der Defekt $r = 2$, so wissen wir, dass das Ergebnis der Spline-Interpolation eine zusammengesetzte Funktion ist, deren Teilfunktion maximal den Grad 2 besitzen. Weiterhin wissen wir, dass die Teilfunktionen an den Stützstellen in genau $k - r = 0$ Ableitungen an den Stützstellen übereinstimmen.



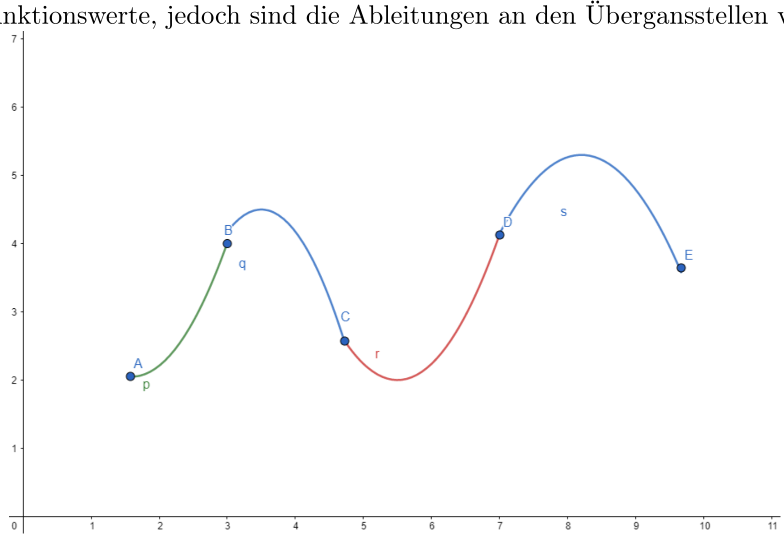
Grad: 1, Defekt: $1 \to k - r = 0$

Die partiellen Funktionen besitzen an den Stützstellen an welchen sie eineinander übergehen die gleichen Funktionswerte, jedoch sind die Ableitungen an den Übergansstellen verschieden.



Grad: 2, Defekt: $2 \to k - r = 0$

Die partiellen Funktionen besitzen an den Stützstellen an welchen sie eineinander übergehen die gleichen Funktionswerte, jedoch sind die Ableitungen an den Übergansstellen verschieden.



Grad: 2, Defekt: $1 \to k - r = 1$

Die partiellen Funktionen besitzen an den Stützstellen an welchen sie eineinander übergehen die gleichen Funktionswerte. Weiterhin stimmen die Werte der ersten Ableitung an den Stützstellen überein.

6.1 Lineare Splines

Grad: 1, Defekt: 1

Sei $S(x)$ die lineare Splinefunktion, welche durch die partiell definierten Funktionen $S_i(x)$ definiert ist. Sei x_i die Stützstelle, welche den Funktionswert y_i besitzt. Damit die Funktion $S(x)$ stetig ist (es somit keine "Sprünge" bei den Funktionsübergängen gibt), stellen wir folgende Forderung an die ineinander übergehenden partiell definierten Funktionen:

$$S_i(x_i) = y_i$$
$$S_i(x_{i+1}) = S_{i+1}(x_{i+1}) = y_{i+1}$$

Anmerkung: Wir möchten, dass die Funktionen an den Stützstellen an denen sie ineinander übergehen die selben Funktionswerte besitzen.

Jede Funktion $S_i(x)$ ist nur für ein gewisses Intervall definiert.
Die Funktion $S_i(x)$ kann wie folgt beschrieben werden:

$$S_i(x) = \begin{cases} y_i + m_i \cdot (x - x_i) & x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0 & x \notin [x_i, x_{i+1}] \end{cases}$$

Es ist somit nur notwendig die Faktoren m_i zu bestimmen, da die Werte y_i sowie x_i bereits bekannt sind. Der Anstieg m_i kann durch die Werte $y_i, y_{i+1}, x_i, x_{i+1}$ bestimmt werden. Es gilt:

$$m_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$$

Es folgt:

$$S_i(x) = \begin{cases} y_i + \frac{y_{i+1}-y_i}{x_{i+1}-x_i} \cdot (x - x_i) & x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0 & x \notin [x_i, x_{i+1}] \end{cases}$$

Anmerkung: Die Herleitung des Anstiegs sowie der Definition einer linearen Splinefunktion recht simpel und sollte auf jeden Fall angewendet werden können.

6.1.1 Fehlerabschätzung

Wir wissen durch Lagrange, dass

$$|f(x) - L_n(x)| \leq \tfrac{1}{(n+1)!} \cdot \max_{x \in [a,b]} |f^{n+1}(x)| \cdot |b_{n+1}(x)|.$$

Wir untersuchen für jede Teilfunktion unserer linearen Splinefunktion den Fehler und schätzen mit dem größten Fehler den Fehler der Splinefunktion ab.

Da wir eine lineare Splinefunktion haben, folgt $n = 1,\ \ [a, b] = [x_i, x_{i+1}],\ \ b_2(x) = (x-x_i)\cdot(x-x_{i+1})$.
Wir wissen weiterhin, dass $(x - x_i) \cdot (x - x_{i+1}) \leq (x_{i+1} - x_i)^2 = h_i^2$.
Sei $\forall i : h_i \leq h$ und sei $\forall x \in [x_0, x_n] : |f^{''}(x)| \leq M_2$, so gilt:

$$|f(x) - S(x)| \leq \tfrac{1}{2} \cdot M_2 \cdot h^2.$$

6.2 Quadratische Splines

Grad: 2, Defekt: 1

Wir möchten eine zusammengesetzte Funktion, für welche gilt:

$$S(x_i) = y_i$$
$$S(x_{i+1}) = y_{i+1}$$
$$S^{'}(x_i) = y_i^{'}$$
$$S^{'}(x_{i+1}) = y_{i+1}^{'}$$

Die Spline-Funktion soll an den Stützpunken also sowohl den gleichen Funktionswert, sowie den gleichen Anstieg besitzen. Dies sind allerdings 4 Forderungen. Ein Polynom vom Grad 2 besitzt jedoch nur 3 Freiheitsgrade. Hieraus folgt, dass wir die Forderungen so nicht aufstellen können. angepasste Forderungen:

$$S_i(x_i) = y_i$$
$$S_i(x_{i+1}) = S_{i+1}(x_{i+1}) = y_{i+1}$$
$$S_i^{'}(x_{i+1}) = S_{i+1}^{'}(x_{i+1})$$

Wir fordern nun nicht mehr, dass die Funktionen an den Stützstellen festgelegte Anstiege besitzen sondern nur, dass die ineinander übergehenden Funktionen an den Stützstellen den gleichen Anstieg besitzen.

Sei $t \in [0, 1]$ und h_i die Schrittweite zwischen x_i und x_{i+1}, so gilt:

$$S_i(x_i + t \cdot h_i) = y_i + t \cdot h_i \cdot m_i + t^2 \cdot (y_{i+1} - y_i - h_i \cdot m_i)$$

Dass dieser Term korrekt ist kann überprüft werden, indem wir die Eigenschaften, die $S(x)$ erfüllen muss überprüfen. Es muss u.a. gelten $S(x_i) = y_i, S(x_{i+1}) = y_{i+1}$.
Wir wissen, dass $x_{i+1} = x_i + 1 \cdot h_i$.

$$S_i(x_i) = S(x_i + 0 \cdot h_i) = y_i + 0 \cdot h_i \cdot m_i + 0^2 \cdot (y_{i+1} - y_i - h_i \cdot m_i) = y_i$$
$$S_i(x_{i+1}) = S(x_i + 1 \cdot h_i) = y_i + 1 \cdot h_i \cdot m_i + 1^2 \cdot (y_{i+1} - y_i - h_i \cdot m_i) = y_{i+1}$$

Wir fordern weiterhin jedoch auch:

$$S_i^{'}(x_{i+1}) = S_{i+1}^{'}(x_{i+1}).$$

Es gilt:

$$S_{i,t}^{'}(x_i + t \cdot h_i) = \tfrac{\delta S_i}{\delta t} = \tfrac{\delta S_i}{\delta x} \cdot \tfrac{\delta x}{\delta t} = \tfrac{\delta S_i}{\delta x} \cdot h_i$$

. Es folgt:

$$\tfrac{\delta S_i}{\delta t} = \tfrac{S_i}{x} \cdot h_i$$
$$\Rightarrow \tfrac{1}{h_i} \cdot \tfrac{\delta S_i}{\delta t} = \tfrac{\delta S_i}{\delta x}.$$

Wir können $\dfrac{\delta S_i}{\delta t}$ berechnen:

$$\frac{\delta S_i}{\delta t_i} = h_i \cdot m_i + 2 \cdot t \cdot (y_{i+1} - y_i - h_i \cdot m_i).$$

Setzen wir diese Ableitung in den Term $\dfrac{1}{h_i} \cdot \dfrac{\delta S_i}{\delta t} = \dfrac{\delta S_i}{\delta x}$ ein so erhalten wir:

$$\tfrac{1}{h_i} \cdot (h_i \cdot m_i + 2 \cdot t \cdot (y_{i+1} - y_i - h_i \cdot m_i)) = \tfrac{\delta S_i}{\delta x} = S_i(x)^{'}$$

Berechnen wir nun $S_i^{'}(x_{i+1})$ so erhalten wir

$$S_i^{'}(x_{i+1}) = S_i^{'}(x_i + 1 \cdot h_i) = \tfrac{1}{h_i} \cdot (h_i \cdot m_i + 2 \cdot 1 \cdot (y_{i+1} - y_i - h_i \cdot m_i))$$
$$S_i^{'}(x_{i+1}) = \tfrac{2 \cdot (y_{i+1} - y_i)}{h_i} - m_i = 2 \cdot [x_i, x_{i+1}] - m_i = 2 \cdot d_i - m_i.$$

Nun fordern wir noch, dass $S_i^{'}(x_i) = S_{i-1}^{'}(x_i) = m_i$ ist bzw. dass die Anstiege ineinander übergehen.

$$S_i^{'}(x_i) = S_{i-1}^{'}(x_i)$$
$$\Rightarrow m_i = 2 \cdot d_{i-1} - m_{i-1}.$$

Wir sehen, dass der Anstieg m_i vom vorherigen Anstieg abhängt. Es kann jedoch ein Anstieg $y_i^{'} = m_i$ frei gewählt werden. Der Wert $y_i^{'}$ verändert je nach Wahl die Spline-Funktion. Er kann so gewählt werden, dass die Krümmung der Spline-Funktion minimiert werden kann. Das Beispiel hierfür wurde in der Vorlesung behandelt.

6.3 Kubische Splines

Grad: 3, Defekt: 2
Wir haben einen Defekt von 2, somit fordern wir, dass die 0.te und 1.Ableitung an den Übergangsstellen der Teilfunktionen identisch sein müssen.

$$S(x_i) = y_i$$
$$S(x_{i+1}) = y_{i+1}$$
$$S^{'}(x_i) = y_i^{'}$$
$$S^{'}(x_{i+1}) = y_{i+1}^{'}$$

Wir haben erneut 4 Forderungen. Da ein Polynom vom Grad 3 genau 4 Freiheitsgrade besitzt können wir also alle Forderungen erfüllen.
Es gilt:

$$S_i(x_i + t \cdot h_i) = (1-t)^2 \cdot (1 + 2 \cdot t) \cdot y_i + t^2 \cdot (3 - 2 \cdot t) \cdot y_{i+1} + t \cdot (1-t) \cdot h_i \cdot ((1-t) \cdot m_i - t \cdot m_{i+1})$$

Grad: 3, Defekt: 1
Forderungen:

$$S_i(x_i) = y_i$$
$$S_i(x_{i+1}) = S_{i+1}(x_{i+1}) = y_{i+1}$$
$$S_i^{'}(x_{i+1}) = S_{i+1}^{'}(x_{i+1})$$
$$S_i^{''}(x_{i+1}) = S_{i+1}^{''}(x_{i+1})$$

Wir fordern, dass die ersten und zweiten Ableitungen an den Übergangsstellen übereinstimmen. Hierbei kann ein m_i wie zuvor bei den quadratischen Splines frei gewählt werden.

Es gilt:

$$S_i^{''}(x_i + t \cdot h_i) = \frac{6\cdot(1-2\cdot t)\cdot(y_{i+1}-y_i)+2\cdot h_i((-2+3\cdot t)\cdot m_i+(-1+3\cdot t)\cdot m_{i+1})}{h_i^2}$$

Betrachten wir unsere Forderungen so sehen wir:

$$S_i^{''}(x_{i+1}) = S_{i+1}^{''}(x_{i+1})$$
$$\Rightarrow \frac{6\cdot(1-2\cdot 1)\cdot(y_{i+1}-y_i)+2\cdot h_i((-2+3\cdot 1)\cdot m_i+(-1+3\cdot 1)\cdot m_{i+1})}{h_i^2}$$
$$= \frac{6\cdot(1-2\cdot 0)\cdot(y_{i+2}-y_{i+1})+2\cdot h_{i+1}((-2+3\cdot 0)\cdot m_{i+1}+(-1+3\cdot 0)\cdot m_{i+2})}{h_{i+1}^2}$$

$$\Rightarrow \frac{-6\cdot(y_{i+1}-y_i)+2\cdot h_i(m_i+2\cdot m_{i+1})}{h_i^2} = \frac{6\cdot(y_{i+2}-y_{i+1})+2\cdot h_{i+1}(-2\cdot m_{i+1}-m_{i+2})}{h_{i+1}^2}$$

$$\Rightarrow \frac{-6\cdot(y_{i+1}-y_i)+2\cdot h_i(m_i+2\cdot m_{i+1})}{h_i^2} = \frac{6\cdot(y_{i+2}-y_{i+1})-2\cdot h_{i+1}(2\cdot m_{i+1}+m_{i+2})}{h_{i+1}^2}$$

$$\Rightarrow \frac{-6\cdot(y_{i+1}-y_i)+2\cdot h_i(m_i+2\cdot m_{i+1})}{h_i^2} = (-1) \cdot \frac{-6\cdot(y_{i+2}-y_{i+1})+2\cdot h_{i+1}(2\cdot m_{i+1}+m_{i+2})}{h_{i+1}^2}$$

$$\Rightarrow \frac{-6\cdot(y_{i+1}-y_i)}{h_i^2} + \frac{2\cdot h_i(m_i+2\cdot m_{i+1})}{h_i^2} = (-1) \cdot \frac{-6\cdot(y_{i+2}-y_{i+1})}{h_{i+1}^2} + (-1) \cdot \frac{2\cdot h_{i+1}(2\cdot m_{i+1}+m_{i+2})}{h_{i+1}^2}$$

$$\Rightarrow -6 \cdot [x_i, x_{i+1}] \cdot \frac{1}{h_i} + \frac{2(m_i+2\cdot m_{i+1})}{h_i} = 6 \cdot [x_{i+1}, x_{i+2}] \cdot \frac{1}{h_{i+1}} + (-1) \cdot \frac{2\cdot(2\cdot m_{i+1}+m_{i+2})}{h_{i+1}}$$

$$\Rightarrow -6 \cdot [x_i, x_{i+1}] \cdot \frac{1}{h_i} + (2m_i + 4 \cdot m_{i+1}) \cdot \frac{1}{h_i} = 6 \cdot [x_{i+1}, x_{i+2}] \cdot \frac{1}{h_{i+1}} + (-1) \cdot (4 \cdot m_{i+1} + 2 \cdot m_{i+2}) \cdot \frac{1}{h_{i+1}}$$

$$\Rightarrow \tfrac{1}{h_i}\cdot(-6\cdot[x_i,x_{i+1}]+2m_i+4\cdot m_{i+1}) = \tfrac{1}{h_{i+1}}\cdot(6\cdot[x_{i+1},x_{i+2}]-4\cdot m_{i+1}-2\cdot m_{i+2})$$

$$\Rightarrow \tfrac{1}{h_i}\cdot(-3\cdot[x_i,x_{i+1}]+m_i+2\cdot m_{i+1}) = \tfrac{1}{h_{i+1}}\cdot(3\cdot[x_{i+1},x_{i+2}]-2\cdot m_{i+1}-m_{i+2})$$

$$\Rightarrow \tfrac{1}{h_i}\cdot(m_i+2\cdot m_{i+1})+\tfrac{1}{h_{i+1}}\cdot(2\cdot m_{i+1}+m_{i+2}) = \tfrac{1}{h_{i+1}}\cdot 3\cdot[x_{i+1},x_{i+2}]+\tfrac{1}{h_i}\cdot 3\cdot[x_i,x_{i+1}]$$

$$\Rightarrow \tfrac{1}{h_i}\cdot(m_i+2\cdot m_{i+1})+\tfrac{1}{h_{i+1}}\cdot(2\cdot m_{i+1}+m_{i+2}) = 3\cdot(\tfrac{1}{h_{i+1}}\cdot[x_{i+1},x_{i+2}]+\tfrac{1}{h_i}\cdot[x_i,x_{i+1}])$$

$$\Rightarrow \tfrac{h_{i+1}}{h_i\cdot h_{i+1}}\cdot(m_i+2\cdot m_{i+1})+\tfrac{h_i}{h_{i+1}\cdot h_i}\cdot(2\cdot m_{i+1}+m_{i+2}) = 3\cdot(\tfrac{h_i}{h_{i+1}\cdot h_i}\cdot[x_{i+1},x_{i+2}]+\tfrac{h_{i+1}}{h_i\cdot h_{i+1}}\cdot[x_i,x_{i+1}])$$

$$\Rightarrow \tfrac{h_{i+1}}{h_i\cdot h_{i+1}}\cdot(m_i+2\cdot m_{i+1})+\tfrac{h_i}{h_{i+1}\cdot h_i}\cdot(2\cdot m_{i+1}+m_{i+2}) = 3\cdot(\tfrac{h_i}{h_{i+1}\cdot h_i}\cdot[x_{i+1},x_{i+2}]+\tfrac{h_{i+1}}{h_i\cdot h_{i+1}}\cdot[x_i,x_{i+1}])$$

$$\Rightarrow \tfrac{1}{h_i\cdot h_{i+1}}\cdot(h_{i+1}\cdot(m_i+2\cdot m_{i+1})+h_i\cdot(2\cdot m_{i+1}+m_{i+2})) = 3\cdot\tfrac{1}{h_i\cdot h_{i+1}}\cdot(h_i\cdot[x_{i+1},x_{i+2}]+h_{i+1}\cdot[x_i,x_{i+1}])$$

$$\Rightarrow h_{i+1}\cdot(m_i+2\cdot m_{i+1})+h_i\cdot(2\cdot m_{i+1}+m_{i+2}) = 3\cdot(h_i\cdot[x_{i+1},x_{i+2}]+h_{i+1}\cdot[x_i,x_{i+1}])$$

$$\Rightarrow h_{i+1}\cdot m_i+2\cdot h_{i+1}\cdot m_{i+1}+2\cdot h_i\cdot m_{i+1}+h_i\cdot m_{i+2} = 3\cdot(h_i\cdot[x_{i+1},x_{i+2}]+h_{i+1}\cdot[x_i,x_{i+1}])$$

$$\Rightarrow \tfrac{h_{i+1}}{h_i+h_{i+1}}\cdot m_i+2\cdot\tfrac{h_{i+1}}{h_i+h_{i+1}}\cdot m_{i+1}+2\cdot\tfrac{h_i}{h_i+h_{i+1}}\cdot m_{i+1}+\tfrac{h_i}{h_i+h_{i+1}}\cdot m_{i+2} =$$

$$3\cdot(\tfrac{h_i}{h_i+h_{i+1}}\cdot[x_{i+1},x_{i+2}]+\tfrac{h_{i+1}}{h_i+h_{i+1}}\cdot[x_i,x_{i+1}])$$

$$\Rightarrow \tfrac{h_{i+1}}{h_i+h_{i+1}}\cdot m_i+2m_{i+1}+\tfrac{h_i}{h_i+h_{i+1}}\cdot m_{i+2} = 3\cdot(\tfrac{h_i}{h_i+h_{i+1}}\cdot[x_{i+1},x_{i+2}]+\tfrac{h_{i+1}}{h_i+h_{i+1}}\cdot[x_i,x_{i+1}])$$

Sei $v_i = \frac{h_{i+1}}{h_i+h_{i+1}}$, $u_i = \frac{h_i}{h_i+h_{i+1}}$. Es ist offensichtlich, dass $v_i + u_i = 1$.

$$\Rightarrow v_i\cdot m_i+2m_{i+1}+u_i\cdot m_{i+2} = 3\cdot(u_i\cdot[x_{i+1},x_{i+2}]+v_i\cdot[x_i,x_{i+1}])$$

Sei $d_i = [x_i,x_{i+1}]$, $d_{i+1} = [x_{i+1},x_{i+2}]$.

$$\Rightarrow v_i\cdot m_i+2m_{i+1}+u_i\cdot m_{i+2} = 3\cdot(u_i\cdot d_{i+1}+v_i\cdot d_i)$$

Wir erhalten $n-1$ Gleichungen für $n+1$ Freiheitsgrade, wir können also zwei zusätzliche Festlegungen treffen. Wir können z.B. fordern

$$S''(x_0) = 0$$
$$\mathrm{S}''(x_n) = 0$$

Es folgt:

$$S''(x_0) = 0 \Rightarrow 2\cdot m_0+m_1 = 3\cdot d_0$$
$$S''(x_n) = m_{n-1}+2\cdot m_n = 3\cdot d_{n-1}$$

Es ergibt sich für diese Wahl die kompakte Schreibweise:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ v_1 & 2 & u_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & v_2 & 2 & u_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & v_3 & 2 & u_3 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & v_{n-1} & 2 & u_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ \vdots \\ m_{n-1} \\ m_n \end{bmatrix} = 3\cdot \begin{bmatrix} d_0 \\ v_1\cdot d_0+u_1\cdot d_1 \\ \vdots \\ v_{n-1}\cdot d_{n-2}+u_{n-1}\cdot d_{n-1} \\ d_{n-1} \end{bmatrix}$$

Es ist offensichtlich, dass die Matrix eine Bandstruktur besitzt. Weiterhin ist sie schwach diagonaldominant, d.h. es gilt: $\forall i : \sum\limits_{j=1 \text{ mit } j\neq i}^{n} |a_{i,j}| \leq |a_{i,i}|$. Dies ist leicht zu überprüfen.
Weiterhin ist leicht ersichtlich, dass das Gleichungssystem lösbar ist wenn man die Determinante der Matrix untersucht.

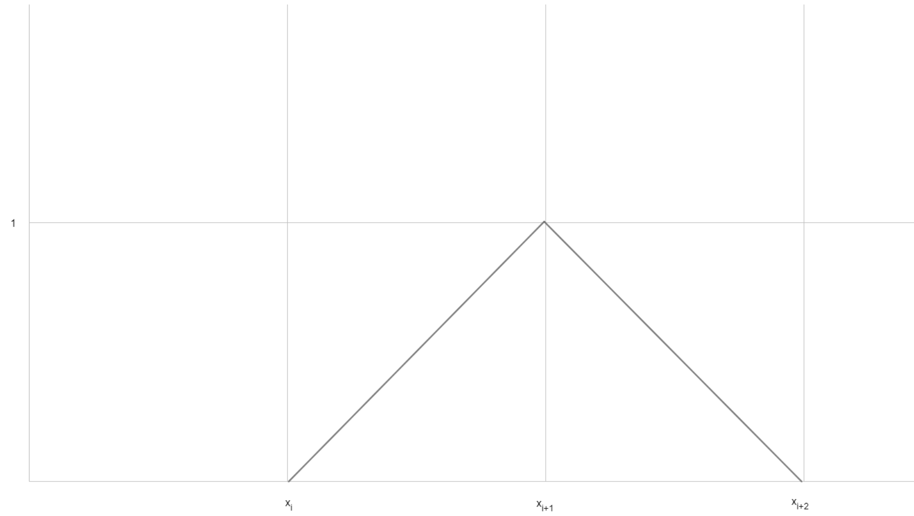
6.4 Basissplines

Die Idee der Basissplines ist es, eine Funktion durch eine Summe von Basissplines darzustellen. Wir suchen ein Basisspline derart, dass es genau den Wert 1 besitzt für x_{i+1}, jedoch den Wert 0 für x_j mit $j \neq i+1$, damit es bei der Summierung keinen Einfluss auf die Werte der anderen Basissplines an den Stellen x_j nimmt.

Dies kann wie folgt formuliert werden:

$$B_{1,i}(x) = \begin{cases} 1 & x = x_{i+1} \\ 0 & sonst \end{cases}.$$

Dies kann grafisch wie folgt dargestellt werden:



Wie können die Basissplines wie folgt bestimmen:

$$B_{1,i}(x) = \begin{cases} \frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i} & x \in [x_i, x_{i+1}) \\ \frac{x_{i+2}-x}{x_{i+2}-x_{i+1}} & x \in [x_{i+1}, x_{i+2}] \\ 0 & sonst \end{cases}.$$

Es folgt:

$$S(x) = \sum_{i=-1}^{n-1} y_{i+1} \cdot B_{1,i}(x).$$

7 Methode der kleinsten Fehlerquadrate

8 Differentiation

8.1 Taylorabgleich

9 Integration

9.1 Rechteckregel

9.2 Trapezregel

9.3 Splines

9.4 Lagrange

9.5 Gauß-Quadratur

9.6 Bernoulli-Polynome

9.7 Romberg-Integration