Lineare Algebra - Tutorium

Anton Lammert

January 15, 2020

1 Info

Dies ist eine Sammlung der Tutoriumsmaterialien. Sie versucht ein Grundverständnis der Probleme sowie ihrer Lösungen zu vermitteln.Für ihre Korrektheit und Vollständigkeit wird nicht garantiert! In der Vorlesung und Übung werden weitere Themen besprochen, welche ebenfalls Klausurrelevant sind. Die Zusammenfassung ist somit kein Ersatz für die Vorlesung und Übung.

Fragen: **anton.benjamin.lammert@uni-weimar.de**

Die Sammlung wurde von Phil Hagen Jungschlaeger und Lucas Sebastian Hübner übernommen und angepasst.

Termin: Donnerstags oder Freitags 13:30 Uhr, HK7 Hörsaal

Vor der Klausur wird es eine Probeklausur geben, welche ihr unter Klausurbedingungen bearbeiten könnt. Es ist ratsam diese Möglichkeit zu nutzen um sich auf die Klausur vorzubereiten.

Alle in der Übung gestellten Aufgaben lassen sich auf Moodle zusätzlich zu Übungsaufgaben finden. Zur zeitnahen Bearbeitung der Übungsblätter wird geraten. Sie dient nicht nur der Festigung des Grundverständnisses sondern kann sich positiv auf die Note nach dem Bestehen der Klausur auswirken!

Contents

2 Logik und Induktion

2.1 Quantoren

$\forall$ - "für alle"
$\exists$ - "es existiert mindestens ein Element"
$\exists!$ - "es existiert genau ein Element"

2.2 Junktoren

A	B	A∧B	A∨B	A⇔B	A⇒B	¬A
1	1	1	1	1	1	0
1	0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	0	1	1
0	0	0	0	1	1	1

2.2.1 Beispielaufgaben

Geben Sie die Wahrheitstabellen an:

$p \wedge (q \vee r)$
$(p \Rightarrow q) \Rightarrow q$
$(p \vee q) \wedge \neg(r \vee q)$

Vereinfachen Sie die letzten beiden Aufgaben.

Zeigen Sie, dass folgende Aussage wahr ist.

$(p \vee (q \wedge r)) \Leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$

2.3 Vollständige Induktion

Die vollständige Induktion besteht aus 3 Schritten:

1. Überprüfen der Gültigkeit der Aussage für das kleinste Element unseres Definitionsbereichs.

2. Aufstellung einer Induktionsbehauptung

3. Induktionsschritt

Oftmals ist der Ansatz für den korrekten Induktionsschritt schwer zu finden. Es ist sinnvoll einige Ausdrücke zum üben selbst zu rechnen! Einige Aufgaben mit Lösungsweg findet ihr **hier**.

2.3.1 Beispielaufgaben

Beweisen Sie induktiv, dass folgende Aussagen für $n \in \mathbb{N}$ wahr sind:

$\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
$\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$
$\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = (\frac{n\cdot(n+1)}{2})^2$

Bsp: Beweisen Sie, durch vollständige Induktion:

$$\prod_{i=2}^{n}(1-\frac{2}{i\cdot(i+1)})=\frac{1}{3}\cdot(1+\frac{2}{n})$$

1. Gilt unsere Aussage für die 2?

   $$1-\frac{2}{2\cdot(2+1)}=\frac{1}{3}\cdot(1+\frac{2}{2})\rightarrow\frac{2}{3}=\frac{2}{3}\rightarrow \text{ja}$$

2. Induktionsbehauptung:
   Die Aussage gilt für alle Zahlen n.

3. Induktionsschritt:
   Wir nehmen unsere Gleichung für n und verändern sie so, dass wir n+1 erhalten.
   Hierbei nutzen wir unsere Formel.

   $$\prod_{i=2}^{n+1}(1-\frac{2}{i\cdot(i+1)})=\frac{1}{3}\cdot(1+\frac{2}{n+1})$$

   Da gilt:

   $$\prod_{i=2}^{n+1}(1-\frac{2}{i\cdot(i+1)})=\prod_{i=2}^{n}(1-\frac{2}{i\cdot(i+1)})\cdot(1-\frac{2}{(n+1)\cdot((n+1)+1)})$$

   können wir unsere Gleichung umformen zu:

   $$\prod_{i=2}^{n}(1-\frac{2}{i\cdot(i+1)})\cdot(1-\frac{2}{(n+1)\cdot((n+1)+1)})=\frac{1}{3}\cdot(1+\frac{2}{n+1})$$

   Nun können wir unser Produkt bis n ersetzen und erhalten:

   $$\frac{1}{3}\cdot(1+\frac{2}{n})\cdot(1-\frac{2}{(n+1)\cdot((n+1)+1)})=\frac{1}{3}\cdot(1+\frac{2}{n+1})$$

   Diese Gleichung formen wir nun um und erhalten:

   $$\frac{1}{3}\cdot(1+\frac{2}{n})\cdot(1-\frac{2}{(n+1)\cdot(n+2)})=\frac{1}{3}\cdot(1+\frac{2}{n+1})$$

   $$(\frac{1}{3}+\frac{2}{3n})\cdot(1-\frac{2}{(n+1)\cdot(n+2)})=\frac{1}{3}\cdot(1+\frac{2}{n+1})$$

   $$\frac{1}{3}-\frac{2}{3\cdot(n+1)\cdot(n+2)}+\frac{2}{3n}-\frac{4}{3n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}=\frac{1}{3}\cdot(1+\frac{2}{n+1})$$

   $$\frac{1}{3}-\frac{2n+4}{3n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}+\frac{2}{3n}=\frac{1}{3}\cdot(1+\frac{2}{n+1})$$

   $$\frac{1}{3}-\frac{2n+4}{3n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}+\frac{2\cdot(n+1)\cdot(n+2)}{3n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}=\frac{1}{3}\cdot(1+\frac{2}{n+1})$$

   $$\frac{1}{3}-\frac{2n+4}{3n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}+\frac{2n^2+6n+4}{3n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}=\frac{1}{3}\cdot(1+\frac{2}{n+1})$$

   $$\frac{1}{3}+\frac{2n^2+6n+4-2n-4}{3n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}=\frac{1}{3}\cdot(1+\frac{2}{n+1})$$

   $$\frac{1}{3}+\frac{2n^2+4n}{3n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}=\frac{1}{3}\cdot(1+\frac{2}{n+1})$$

   $$\frac{1}{3}+\frac{2n\cdot(n+2)}{3n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}=\frac{1}{3}\cdot(1+\frac{2}{n+1})$$

   $$\frac{1}{3}+\frac{2n}{3n\cdot(n+1)}=\frac{1}{3}\cdot(1+\frac{2}{n+1})$$

   $$\frac{1}{3}\cdot(1+\frac{2n}{n\cdot(n+1))})=\frac{1}{3}\cdot(1+\frac{2}{n+1})$$

   $$\frac{1}{3}\cdot(1+\frac{2}{n+1})=\frac{1}{3}\cdot(1+\frac{2}{n+1})$$

3 Mengenlehre

3.1 Symbole der Mengenangabe

$\emptyset$ - die leere Menge
$|$ - eine Bedingung, welche die Elemente der Menge erfüllen müssen

z.B. A $= \{x \in \mathbb{N} \mid x > 5\} \rightarrow$ die Menge aller natürlicher Zahlen größer 5
Teilweise findet sich auch : anstelle von |. Beide bedeuten jedoch das gleiche.

3.2 Mengenoperationen

A $\cup$ B - die Vereinigung von A und B
A $\cap$ B - der Durchschnittvon A und B
A $\setminus$ B - die Menge A ohne die Elemente der Menge B
A $\times$ B - das karthesische Produkt der Mengen A und B
A^C - das Komplement der Menge A

3.2.1 Beispielaufgaben

Stellen Sie folgende Mengen grafisch dar:

$\mathrm{M}_1 = \{x, y \in \mathbb{R} \mid x + y = 5\}$

$\mathrm{M}_2 = \{x, y \in \mathbb{R} \mid x^2 + y \leq 5\}$

$\mathrm{M}_3 = \{x, y \in \mathbb{R} \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq 3\}$

$\mathrm{M}_4 = \{x, y \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 4, |y| \leq 2\}$

$\mathrm{M}_5 = \mathrm{M}_4 \setminus \mathrm{M}_3$

4 Funktionen

4.1 Nullstellen, Definitions- & Wertebereich

Definitionsbereich:
Die Menge bzw. das Intervall, welches alle Elemente definiert, die wir in unsere Funktion einsetzen dürfen. Für eine Funktion f also alle Werte x, für die f(x) definiert ist.

Wertebereich:
Die Menge bzw. das Intervall, welches alle Ergebnisse von f(x) für alle Elemente x des Definitionsbereiches enthält.

Nullstellen:
Alle Werte x, für welche gilt: f(x) = 0.

4.2 Nullstellenberechnung

Nullstellen quadratischer Funktionen können z.B. durch die pq- oder Mitternachtsformel bestimmt werden. Für Funktionen höheren Grades bietet es sich häufig an das Polynom zu vereinfachen. Dies kann z.B. durch Polynomdivision geschehen, wenn wir bereits eine Nullstelle kennen.

p-q Formel:

$$x^2 + px + q = 0 \to x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$$

Mitternachtsformel:

$$ax^2 + bx + c = 0 \to x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

4.3 Intervallarten

Intervalle sind häufig notwendig um genau zu beschreiben, für welchen Zahlenbereich ein gewisses Kriterium erfüllt ist.

Abgeschlossene Intervalle
[A,B] - gibt ein Intervall an, welches alle Elemente von A bis B einschließlich A und B enthält.

Offene Intervalle
(A,B) - gibt ein Intervall an, welches alle Elemente von A bis B jedoch ohne A und B enthält.

Halboffene Intervalle
[A,B) - gibt ein Intervall an, welches alle Elemente von A bis B einschließlich A und ohne B enthält.

4.4 Monotonieverhalten

Das Monotonierverhalten gibt eine Aussage über die Entwicklung der Funktionswerte mit steigenden x-Werten. Man unterscheidet zwischen monoton fallend & monoton steigend.

Monoton steigend:
Der Funktionswert wächst mit steigendem Definitionswert bzw. die erste Ableitung ist positiv.

Monoton fallend:
Der Funktionswert verkleinert sich mit steigendem Definitionswert bzw. die erste Ableitung ist negativ.

Da das Monotonieverhalten sich nicht zwischen den Wendepunkten ändert ist es sinnvoll diese auszurechnen um das Monotonieverhalten beschreiben zu können.
Hierzu berechnen wir die Nullstellen der ersten Ableitung und setzen diese in die zweite Ableitung ein. Ist unser Ergebnis größer 0 so haben wir einen Tiefpunkt, ist es kleiner 0 so handelt es sich um einen Hochpunkt.

4.5 Gerade und ungerade Funktionen

Häufig auch als punkt- und achsensymetrische Funktionen bezeichnet.

Ist eine Funktion gerade bzw. achsensymetrisch so gilt für alle x:

$$f(x) = f(-x)$$

Ist eine Funktion ungerade bzw. punktsymetrisch so gilt für alle x:

$$f(-x) = -f(x)$$

4.6 Periodizität

Für eine Funktion heißt periodisch wenn es eine Zahl a gibt für die gilt:

$$f(x) = f(x+a)$$

Die kleinste Zahl a, die diese Bedingung erfüllt bezeichnet man als Periode.

4.7 Umkehrfunktion

Ist eine Funktion bijektiv bzw. eineindeutig, so existiert ihre Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$. Die umkehrfunktion weißt jedem Funktionswert wieder seinen Definitionswert zu.
Dies ist nur eindeutig möglich wenn unsere Funktion bijektiv ist.

f(x)= $x^2 \rightarrow$ nicht eineindeutig, da f(2) = 4 & f(-2) = 4

f(x) = $5x - 7 \rightarrow$ eineindeutig
$y = 5x - 7 \rightarrow y + 7 = 5x \rightarrow \frac{y+7}{5} = x$

5 Ungleichungen

Meist muss für eine Ungleichung angegeben werden für welches Intervall sie wahr ist.
Hierzu muss das Verhalten unserer Funktion häufig in bestimmten Intervalle zerlegt werden um diese anschließend auf ihre Korrektheit zu überprüfen. Wichtig ist hierbei die Wahl der Intervalle.

5.1 Beträge in Ungleichungen

Für Beträge gilt:

$$x < 0 \rightarrow |x| = -x$$
$$x \geq 0 \rightarrow |x| = x$$

Wir können also unsere Ungleichung nicht einfach mit dem Wert in unserem Betrag umformen sondern müssen zuerst unseren Betrag ersetzen.

5.1.1 Beispielaufgaben

1. $|1 + x| \geq 4$
2. $|2x + 1| = |x - 1| + 1$
3. $|x - 1| + |x + 5| \leq 4$

Bsp: $|x - 1| \leq 1$

Würden wir einfach unsere Gleichung ohne Betrag betrachten, so würden wir zu dem Schluss kommen, dass unsere Gleichung für das Intervall $(-\inf, 2]$ gilt. Für x = -1 ist unsere Ungleichung jedoch nicht erfüllt. Wir müssen also folglich eine Fallunterscheidung machen.
Wann ist der Wert im Betrag kleiner 0 und wann größer?

$|x - 1|$ ist dann kleiner 0 wenn x kleiner 1 ist.

$\rightarrow$ für $x \in (-\infty, 1)$ gilt $|x - 1| = 1 - x$ bzw $-1 \cdot (x - 1)$

$|x - 1|$ ist dann größer oder gleich 0 wenn x größer oder gleich 1 ist.

$\rightarrow$ für $x \in [1, \infty)$ gilt $|x - 1| = x - 1$

Nun muss die Ungleichung für beide Intervalle überprüft werden.

$x < 1$:
$1 - x \leq 1 \rightarrow$ x musst damit unsere Ungleichung gilt größer oder gleich 0 sein.

Wir erhalten also das Intervall $[0, 1)$.

$x \geq 1$:
$x - 1 \leq 1 \rightarrow$ x muss damit unsere Ungleichung gilt kleiner gleich 2 sein.

Wir erhalten also das Intervall $[1, 2]$

Unsere Ungleichung ist also für das Intervall [0,2] wahr.

5.2 Brüche in Ungleichungen

Häufig enthalten Ungleichungen Brüche. Hierbei ist es wichtig vor dem Umformen die Funktion zu analysieren. Ist unser Divisior von x abhängig, so kann er negativ werden. Ist dies der Fall und wir multiplizieren unsere Ungleichung mit dem Divisor, so kehrt sich unser Relationszeichen um.

5.2.1 Beispielaufgaben

1. $\frac{1}{x-10} > 7$
2. $\frac{3}{x+4} < 0$
3. $\frac{3-x}{x-2} > \frac{x+4}{2\cdot(x-2)}$

Bsp: $\frac{x}{2x+1} < 2$

Wenn wir unsere Ungleichung einfach mit unserem Divisor multiplizien und anschließend vereinfachen würden, so würden wir $-\frac{2}{3} < x$ erhalten.
Unsere Ungleichung müsste also z.B. für die -$\frac{3}{5}$ erfüllt sein. Setzen wir die -$\frac{3}{5}$ jedoch ein, so erhalten wir: $2 \leq 2$. Wir haben also ein falsches Intervall bestimmt.

Wann wird der Divisor kleiner 0 und wann größer?

$2x + 1$ ist dann kleiner 0 wenn x kleiner als $-\frac{1}{2}$ ist.

$\rightarrow$ für $x \in (-\infty, -\frac{1}{2})$ gilt $\frac{x}{2x+1} < 2 \Leftrightarrow x > 2 \cdot (2x + 1)$

$2x + 1$ ist dann größer gleich 0 wenn x größer gleich $-\frac{1}{2}$ ist.

$\rightarrow$ für $x \in [-\frac{1}{2}, \infty)$ gilt $\frac{x}{2x+1} < 2 \Leftrightarrow x < 2 \cdot (2x + 1)$

Nun muss die Ungleichung für beide Intervalle überprüft werden.

$x < -\frac{1}{2}$:
$x > 2 \cdot (2x + 1) \rightarrow -\frac{2}{3} > x \rightarrow$ x muss kleiner $-\frac{2}{3}$ sein.

Wir erhalten also das Intervall $(-\infty, -\frac{2}{3})$.

$x > -\frac{1}{2}$:
$x < 2 \cdot (2x + 1) \rightarrow -\frac{2}{3} < x \rightarrow$ x muss größer als $-\frac{2}{3}$ sein.

Da wir nur das Intervall für $x \geq -\frac{1}{2}$ betrachtet haben und alle diese Elemente unsere Bedingung erfüllen ergibt sich das Intervall $(-\frac{1}{2}, \infty)$.

Unsere Ungleichung ist also für $x \in (-\infty, -\frac{2}{3}) \cup (-\frac{1}{2}, \infty)$ wahr.

6 Komplexe Zahlen

Komplexe Zahlen spielen eine wichtige Rolle in der Mathematik, der Physik und der Informatik. Sie erweitern unseren Zahlenraum und ermöglichen es uns u.a. auch mit den Wurzeln von negativen Werten zu rechnen.

Die wichtigste Eigenschaft der Komplexen Zahl ist:

$$i^2 = -1 \text{ bzw. } i = \sqrt[2]{-1}$$

6.1 Darstellungsformen

Man unterscheidet allgemein zwischen 3 Darstellungsformen. Der algebraischen, der polaren und der exponentiellen Form. Da jede Darstellungsform ihre Vor- und Nachteile besitzt bietet es sich häufig an Zahlen in der einen Darstellungsform in einer andere Darstellungsform umzuwandeln. Hierdurch kann häufig viel Zeit & Aufwand gespart werden.

6.1.1 Algebraische Form

Die algebraische(bzw. arithmetische) Form einer komplexen Zahl ist definiert als:

$$Z = a + bi \text{ mit } a, b \in \mathbb{R} \text{ und } Z \in \mathbb{C}$$

Den **Re**alteil bildet a und den **Im**aginärteil bildet b. Die algebraische Form eignet sich für simple Operationen.

6.1.2 Polar Form

Die Polar Form, auch Polarkoordinatendarstellung oder Trigonometrische Form ist definiert als:

$$Z = r \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)) \text{ mit } r \in \mathbb{R}$$

Den **Betrag**(bzw. Radius) bildet r. Das **Argument** von Z ist φ, gewöhnlich im Bogenmaß. Der Name und die Eigenschaften der Form ergeben sich, in dem man in einem 2D-Koordinatensystem den **Re**alteil auf der x und den **Im**aginärteil auf der y-Achse aufträgt.
Die Polar Form eignet sich für die Potenzierung, der Multiplikation sowie der Division.

6.1.3 Exponential Form

Die Exponential Form(bzw. euklidsche Formel) ist definiert als:

$$Z = r \cdot e^{i \cdot \varphi}$$

Sie eignet sich ebenfalls für die Potenzierung, die Multiplikation und die Division.

6.1.4 Formen umrechnen

Es gilt:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ ; } \tan(\varphi) = \tfrac{b}{a} \text{ ; } a = r \cdot \cos\varphi \text{ und } b = r \cdot \sin\varphi$$

Achtung! Bogenmaß bei der Umwandlung beachten!

6.1.5 Beispielaufgaben

Wandeln Sie die gegebenen Zahlen in die jeweils fehlenden Formen um:

1. $Z = i + 1$
2. $Z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$
3. $Z = 9 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{4}}$
4. $Z = i + \frac{1+i}{3+i}$ (Tipp: Division in Polar-Form)

Bsp: $\frac{(1-i)^2}{1+i}$

$\frac{(i-1)\cdot(i-1)}{1+i} \rightarrow \frac{1-2\cdot ii^2}{1+i} \rightarrow \frac{-2\cdot i}{1+i} \rightarrow \dfrac{2\cdot(\cos(-\frac{\pi}{2}) + i\cdot\sin(-\frac{\pi}{2}))}{\sqrt{2}\cdot(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\cdot\sin(\frac{\pi}{4}))} \rightarrow \sqrt{2}\cdot(\cos(-\frac{3\cdot\pi}{4}) + i\cdot\sin-(\frac{3\cdot\pi}{4})) = \sqrt{2}\cdot e^{i\cdot(-\frac{3\cdot\pi}{4})}$

6.2 Allgemeine Operationen

6.2.1 Addition

$$Z_1 + Z_2 = (a+bi) + (c+id) = (a+c) + i(b+d)$$

6.2.2 Subtraktion

$$Z_1 - Z_2 = (a+bi) - (c+id) = (a-c) + i(b-d)$$

6.2.3 Multiplikation

$$Z_1 \cdot Z_2 = (a+bi) \cdot (c+id) = (a \cdot c) - (b \cdot d) + i(a \cdot d + b \cdot c)$$

$$Z_1 \cdot Z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

$$Z_1 \cdot Z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

6.2.4 Division

$$Z_1 / Z_2 = (a+bi)/(c+id) = \tfrac{a \cdot c + b \cdot d}{c^2+d^2} + i \cdot \tfrac{c \cdot b - a \cdot d}{c^2+d^2}$$

$$Z_1 / Z_2 = \tfrac{r_1}{r_2} \cdot (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

6.2.5 Konjugierte Komplexe Zahl

$$\overline{Z} = \overline{(a+bi)} = a - bi$$

$$\overline{Z} = r \cdot e^{i(-\varphi)}$$

6.2.6 Betrag

$$|Z| = \sqrt[2]{a^2 + b^2} = r \text{ mit } r \in \mathbb{R}$$

6.2.7 Inverse

$$Z^{-1} = \tfrac{\overline{Z}}{Z \cdot \overline{Z}} = \tfrac{\overline{Z}}{|Z|^2}$$

(für $|Z| = 1$ gilt $\frac{1}{Z} = \overline{Z}$, also eine Spiegelung an der X(Re)-Achse.) Oft ist das Inverse eine gute Alternative zur **Division**! Oder mittels potenzieren[n=-1]:

$$Z^n = (r \cdot e^{i\varphi})^n = r^n \cdot e^{i\varphi n}$$

6.2.8 Argument

Das Argument ist von π bis $-\pi$, aber nicht für 0? definiert. Das Vorzeichen des Imaginärteils ist dann gleich dem Vorzeichen des Arguments.

$$a = r \cdot \cos(\varphi), \;\; b = r \cdot \sin(\varphi) = a \cdot \tan(\varphi) \text{ mit } \varphi \in (-\pi, \pi]$$

6.2.9 Formel von Moivre

$$(r \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)))^n = r^n \cdot (\cos(n \cdot \varphi) + i \cdot \sin(n \cdot \varphi))$$

Achtung bei Wurzeln! Für jede Wurzel vom Grad n gibt es n Lösungen!

6.2.10 n-te Wurzel

Die n-te Wurzel einer Komplexen Zahl ist ein Spezialfall. Durch die Eigenschaft($i = \sqrt[2]{-1}$) gibt es genau n verschiedene Lösungen:

$$\sqrt[n]{Z} = \sqrt[n]{r} \cdot (\cos(\tfrac{\varphi + 2k\pi}{n}) + i \cdot \sin(\tfrac{\varphi + 2k\pi}{n})) \text{ mit k=0,1,...,n-1}$$

Für r=1 kann man sich die Wurzeln auf dem Einheitskreis gut veranschaulichen!

6.2.11 Beispielaufgaben

Rechnen sie folgende Terme aus:

1. $(i - \sqrt{3})^8$
2. $2 + 3i + 25 \cdot (\cos(\frac{\pi}{2}) + i \cdot \sin(\frac{\pi}{2}))$
3. $\frac{(15+12i)^3}{7 \cdot (\cos(0{,}7) + i \cdot \sin(0{,}7))}$
4. $(12 + i) \cdot (12 - i)$

Bsp:
Berechnen Sie $\sqrt[5]{3+4i}$ und stellen Sie die Lösungen grafisch in einer Skizze dar

$\sqrt[5]{3+4i} \rightarrow$ umwandlung in Polarform

$r = \sqrt{3^2+4^2}, \varphi = \arctan\frac{4}{3}$

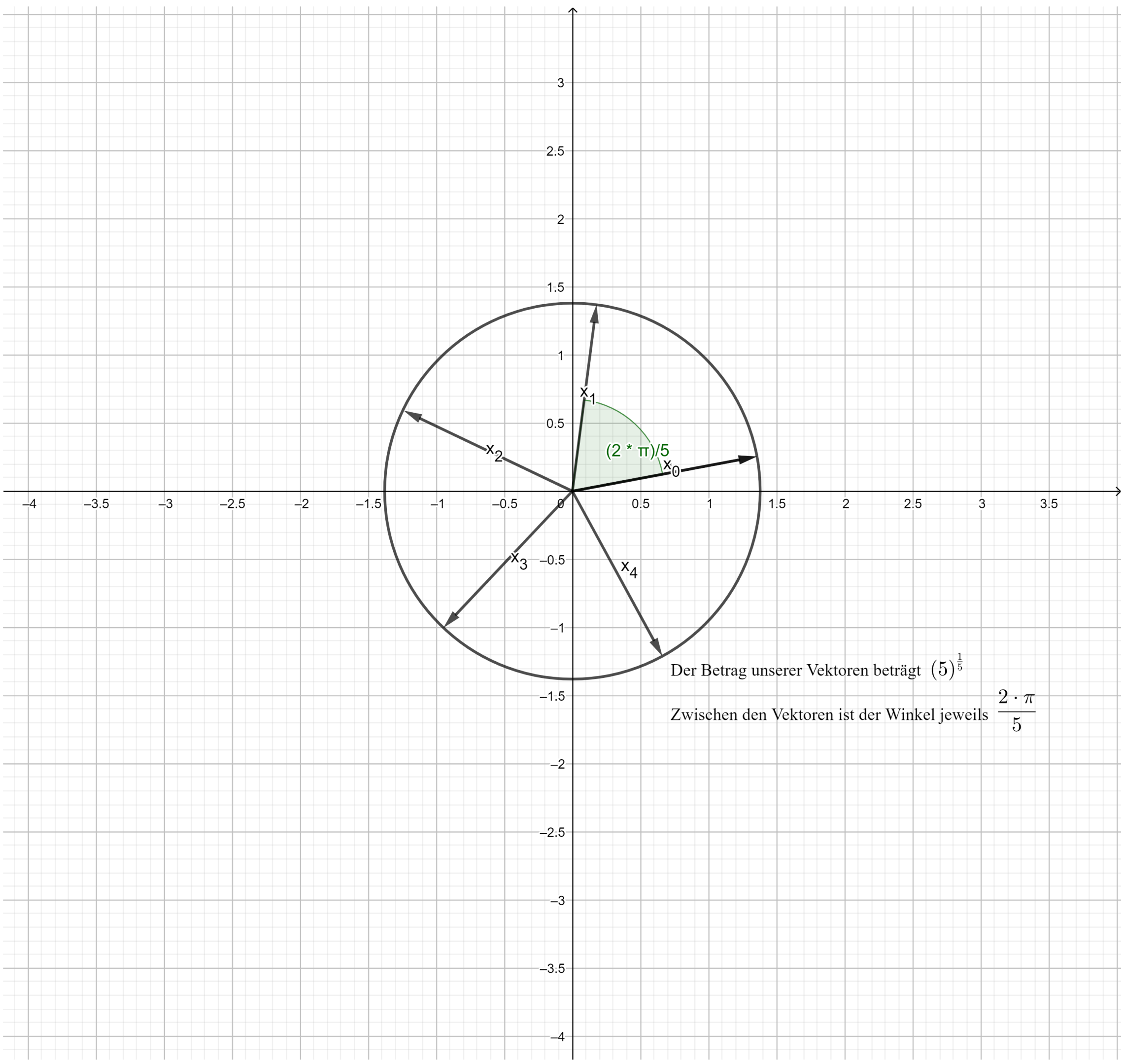
$r = 5, \varphi = 0,927$

$\sqrt[5]{5\cdot(\cos(0,927)+i\cdot\sin(0,927))}$

$(5\cdot(\cos(0,927)+i\cdot\sin(0,927)))^{\frac{1}{5}}$

$5^{\frac{1}{5}}\cdot(\cos(0,927)+i\cdot\sin(0,927))^{\frac{1}{5}}$

$$x_0 = 5^{\frac{1}{5}}\cdot\left(\cos(\tfrac{0,927+0\cdot2\pi}{5})+i\cdot\sin(\tfrac{0,927+0\cdot2\pi}{5})\right) = 1,35607+0,254419\cdot i$$
$$x_1 = 5^{\frac{1}{5}}\cdot\left(\cos(\tfrac{0,927+1\cdot2\pi}{5})+i\cdot\sin(\tfrac{0,927+1\cdot2\pi}{5})\right) = 0,177082+1,36832\cdot i$$
$$x_2 = 5^{\frac{1}{5}}\cdot\left(\cos(\tfrac{0,927+2\cdot2\pi}{5})+i\cdot\sin(\tfrac{0,927+2\cdot2\pi}{5})\right) = -1,24663+0,591248\cdot i$$
$$x_3 = 5^{\frac{1}{5}}\cdot\left(\cos(\tfrac{0,927+3\cdot2\pi}{5})+i\cdot\sin(\tfrac{0,927+3\cdot2\pi}{5})\right) = -0,94754-1,00291\cdot i$$
$$x_4 = 5^{\frac{1}{5}}\cdot\left(\cos(\tfrac{0,927+4\cdot2\pi}{5})+i\cdot\sin(\tfrac{0,927+4\cdot2\pi}{5})\right) = 0,661015-1,21108\cdot i$$



7 Selbsttest

Die folgenden Aufgaben dienen dazu euch selbst zu testen. Sie sollten mit eurem bisherigen Wissen lösbar sein und euch nicht zu viel Zeit kosten.

Zu Mengenlehre und Funktionen gibt es keine gesonderten Testaufgaben, da es in den vergangenen Jahren keine spezifischen Aufgaben zu diesen Gebieten gab. Es ist trotzdem notwendig, dass ihr sie verstanden habt.

7.1 Logik und Induktion

1. Seien p,q und r Aussagen. Beweisen Sie:

   $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \Rightarrow r)$

2. Beweisen Sie durch eine vollständige Induktion:

   $\sum\limits_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$

3. Beweisen Sie durch eine vollständige Induktion:

   $3 \cdot \sum\limits_{k=1}^{n+1} (2k-1)^2 = 4n^3 + 12n^2 + 11n + 3$

7.2 Ungleichungen

1. Lösen Sie folgende Ungleichung:

   $|\frac{x+3}{2x-5}| > 3$

   $2|x+1| < 7(x+2) + |5x+2|$

7.3 Komplexe Zahlen

1. Lösen Sie die Gleichung $z^3 = 2i - 1$ und stellen Sie ihr Ergebnis grafisch in einer Skizze dar.

2. Skizzieren Sie sie die Lösungsmengen der folgenden Ungleichung:

   $-\frac{3\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{2}$

3. Bestimmen Sie den Real- und Imaginärteil.

   $(2e^{i\frac{\pi}{6}})^{18}$

   $\frac{(2i+1)(i-2)+1}{(2-i)^2-2+i}$

4. Geben Sie alle Ergebnisse an.

   $\sqrt[4]{-8 + i \cdot 8\sqrt{3}}$

8 Vektorrechnung

8.1 Vektoren im $\mathbb{R}^n$

Wir nennen $\vec{A} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ a_n \end{bmatrix}$ einen Vektor der Dimension n.

8.1.1 Betrag

$$|\vec{A}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{n-1}^2 + a_n^2}$$

Es gelten unter anderem:

- **Cauchy-Schwarzsche Ungleichung:** $|\vec{A} \cdot \vec{B}| \leq |\vec{A}||\vec{B}|$
- **Dreiecksungleichung:**$|\vec{A} + \vec{B}| \leq |\vec{A}| + |\vec{B}|$

8.1.2 Faktor λ

Analog zur Multiplikation funktioniert die Division.

$$\lambda \cdot \vec{A} = \begin{bmatrix} \lambda \cdot a_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot a_n \end{bmatrix}$$

8.1.3 Normieren

Wir sprechen vom Einheitsvektor, bzw. normierten Vektor $\vec{A_0}$, wenn der Vektor den Betrag 1 hat:

$$\vec{A_0} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$$

8.1.4 Addition

$$\vec{A} + \vec{B} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_{n-1} + b_{n-1} \\ a_n + b_n \end{bmatrix}$$

8.1.5 Skalarprodukt

Das Skalarprodukt zweier Vektoren ergibt ein Skalar(also keinen Vektor).

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \sum_{i=1}^{n} (a_i \cdot b_i)$$

$\rightarrow$ **Falls $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$ ist, ist das Vektorenpaar orthogonal.**

8.1.6 Projektion

$\vec{B}_A$ beschreibt die Projektion eines Vektors B auf einen Vektor A. A_0 ist A normiert $\rightarrow$ besitzt die Länge 1.

$$\vec{B}_A = (\vec{B} \cdot \vec{A_0}) \cdot \vec{A_0}$$

8.1.7 Winkel

$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}| \cdot |\vec{B}|}$$

Liegen die Vektoren A und B auf einer Ebene, so gibt φ den Winkel zwischen ihnen an.
Wollen wir den Winkel zwischen einem Vektor und einer Ebene berechnen so nutzen wir die Normale (n) der Ebene. Es gilt für den Winkel zwischen Gerade und Ebene:

$$\sin(\varphi) = \frac{\vec{A} \cdot \vec{n}}{|\vec{A}| \cdot |\vec{n}|}$$

Für den Schnittwinkel zwischen zwei Ebenen mit den Normalen n_0 & n_1 gilt:

$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{n_0} \cdot \vec{n_1}}{|\vec{n_0}| \cdot |\vec{n_1}|}$$

8.1.8 Abstand Punkt - Gerade

Der Abstand d eines Punktes mit dem Ortsvektor $\vec{Q}$ zu einer Geraden $t = \vec{r_1} + x \cdot \vec{a}$ kann berechnet werden durch:

$$d = \frac{|\vec{a} \times (\vec{Q} - \vec{r_1})|}{|\vec{a}|}$$

8.1.9 Abstand Punkt - Ebene

Der Abstand d einer Punktes mit dem Orstvektor $\vec{Q}$ zu einer Ebene t $= (\vec{x} - \vec{a}) \cdot \vec{n} = 0$ beträgt:

$$d = \frac{|(\vec{Q} - \vec{a}) \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$$

8.1.10 Lineare Unabhängigkeit

$$r \cdot \vec{A} + s \cdot \vec{B} + ... = 0 \text{ für } \forall r, s, .. = 0$$

Sind Vektoren linear unabhängig so kann man keinen der Vektoren mit Hilfe von linear Kombinationen der anderen Vektoren $r \cdot \vec{A} + s \cdot \vec{B} = t \cdot \vec{C}$ darstellen kann. Sprich die Gleichung ist nur erfüllt wenn r,s,t=0 sind.
In einem n-dimensionalen Raum kann es maximal n linear unabhängige Vektoren geben!
n linear unabhängige Vektoren können in einem n-dimensionalen Raum eine **orthogonal Basis** bilden. Von einer **Orthonormal-Basis** sprechen wir, wenn die Basisvektoren auch normiert sind.

8.1.11 Gram-Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren

Das Gram-Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren, orthogonalisiert linear unabhängige Vektoren oder Polynome in einem Vektorraum mit dem Skalarprodukt.

gegeben sind: $\vec{a}_1, ..., \vec{a}_n$ linear unabhängige Vektoren

$$\vec{b}_1 = \vec{a}_1$$
$$\vec{b}_n = \vec{a}_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\vec{a}_n \cdot \vec{b}_i}{\vec{b}_i \cdot \vec{b}_i} \cdot \vec{b}_i$$

Nun sind alle Vektoren orthogonalisiert. Je nach Bedarf kann man sie jetzt noch jeweils **normieren**...

8.2 Besonderheiten im $\mathbb{R}^2$

8.2.1 Flächeninhalt Parallelogram

Zwei linear unabhängige Vektoren spannen im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ ein Parallelogram auf.

$$F_P = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \sin(\varphi) \text{ mit } h = |\vec{B}| \cdot \sin(\varphi)$$

$$F_P = |\vec{A} \times \vec{B}|$$

8.3 Besonderheiten im $\mathbb{R}^3$

8.3.1 Vektorprodukt

Das Vektor-, bzw. Kreuzprodukt ermittelt (im Gegensatz zum Skalarprodukt) einen zu $\vec{A} \times \vec{B}$ orthogonalen Vektor:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \vec{C}$$

$$\begin{bmatrix} a_x & b_x & \vec{i} & - \\ a_y & b_y & \vec{j} & - \\ a_z & b_z & \vec{k} & \pm \\ a_x & b_x & \vec{i} & + \\ a_y & b_y & \vec{j} & + \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a_y \cdot b_z) - (a_z \cdot b_y) \\ (a_z \cdot b_x) - (a_x \cdot b_z) \\ (a_x \cdot b_y) - (a_y \cdot b_x) \end{bmatrix} = \vec{C}$$

8.3.2 Spatprodukt

Das Spatprodukt ergibt sich aus dem Flächeninhalt eines Parallelograms und dem Vektorprodukt.Es ergibt sich das Volumen, welches durch $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ spatförmig(bzw. parallelflächlig) aufgespannt wird.

$$|(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C}| = V_S$$

Sollte V=0 sein, bedeutet das, dass alle Vektoren in einer Ebene liegen, also kein Volumen aufgespannt wird. Im Umkehrschluss sind für V=0, $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ **linear abhängig!**
Aus einem Spat kann man auch andere Körper z.B.: einen **Prisma**($\frac{1}{2}(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} = V_P$) oder **Tetraeder**($\frac{1}{6}(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} = V_T$) modelieren!

8.4 Darstellungsformen

Jede dieser Darstellungsformen hat gewisse Vor- und Nachteile. Die Parameterform ist die anschaulichste, die Koordinatenform eignet sich für die Punktprobe und die Hessesche Normalform ist die wohl mächtigste hinsichtlich Abstandsberechnungen. Um zwischen den Formen zu wechseln eignet sich der Normalenvektor n_0.

8.4.1 Parameterform

-Gerade g:

$$g: \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} + r \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

-Ebene E:

$$E: \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} + r \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} + s \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \to \vec{n_0} = \frac{B \times C}{|B \times C|}$$

8.4.2 Koordinatenform

-**Gerade**(nur im $\mathbb{R}^2$) g:

$$g : 0 = ax + by + c$$

-**Ebene**(im $\mathbb{R}^3$) E:

$$E : 0 = ax + by + cz + d \rightarrow \vec{n_0} = \frac{\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

8.4.3 Hessesche Normalform

-**Ebene**(im $\mathbb{R}^3$) E:

$$E : \left[\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} \right] \cdot \vec{n_0} = 0$$

Die Hessesche Normalform hat die nette Eigenschaft, dass man mittels $\left[\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} \right] \cdot \vec{n_0} = d$ den Abstand d eines Punktes $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ zur Ebene bestimmen kann.

8.5 Schnittgrade zweier Ebenen

Am einfachsten ist es die Schnittgrade zu bestimmen, wenn eine Ebene in Parameterform und die andere Ebene in Koordinatenform vorliegt.

$$E_1 = ax + by + cz - d = 0, E_2 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + \lambda \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \tau \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

Hieraus ergibt sich ein Gleichungssystem, wenn wir x, y und z aus E_1 durch die jeweilige Berechnung der Punkte x, y und z aus unserer Gleichung für E_2 ersetzen.

$$a(x_0 + \lambda \cdot x_1 + \tau \cdot x_2) + b(y_0 + \lambda \cdot y_1 + \tau \cdot y_2) + c(z_0 + \lambda \cdot z_1 + \tau \cdot z_2) - d = 0$$

Durch diese Gleichung erhalten wir ein Verhältnis für λ und τ.
Z.B. $\lambda = \alpha \cdot \tau + \delta$
Nun können wir λ in E_2 ersetzen und zusammenfassen. Wir erhalten:

$$g = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + (\alpha \cdot \tau + \delta) \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \tau \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \Rightarrow g = \begin{bmatrix} x_0 + \delta \cdot x_1 \\ y_0 + \delta \cdot y_1 \\ z_0 + \delta \cdot z_1 \end{bmatrix} + \alpha \cdot \tau \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \tau \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$$
$$g = \begin{bmatrix} x_0 + \delta \cdot x_1 \\ y_0 + \delta \cdot y_1 \\ z_0 + \delta \cdot z_1 \end{bmatrix} + \tau \cdot \left(\alpha \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \right) \Rightarrow g = \begin{bmatrix} x_0 + \delta \cdot x_1 \\ y_0 + \delta \cdot y_1 \\ z_0 + \delta \cdot z_1 \end{bmatrix} + \tau \cdot \left(\begin{bmatrix} x_2 + \alpha \cdot x_1 \\ y_2 + \alpha \cdot y_1 \\ z_2 + \alpha \cdot z_1 \end{bmatrix} \right)$$

8.6 Beispielaufgaben

1. Bestimmen sie die Parameterform der Geraden durch die gegebenen Punkte.

a.) $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, b.) $\begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$, c.) $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$

2. Berechnen Sie den Oberflächeninhalt der durch A$(0,0,0)^T$, B$(4,1,-1)^T$, C$(1,6,1)^T$ und S$(2,2,6)^T$ bestimmte Pyramide, deren dreiseitige Grundfläche durch die Punkte A,B & C definiert ist.

3. Berechnen Sie den Winkel.

a.) $\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + p \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + q \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, b.) $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + p \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 10 \end{bmatrix} + q \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$

c.) $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + p \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + q \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

4. Geben Sie den Schnittpunkt der Gerade g mit der Ebene t an.

a.) g $= \begin{bmatrix} 14 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} + p \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -8 \end{bmatrix}$, t $= \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

b.) g $= \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + p \begin{bmatrix} 7 \\ -5 \\ -4 \end{bmatrix}$, t $= 2x - 3y + z = 5$

5. Bestimmen Sie den Lotfußpunkt L von P auf der Gerade g bzw. der Ebene e, sowie dessen Länge.

a.) P $= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, g $= \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, b.) P $= \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, e $= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

6. Untersuchen Sie die folgen Vektortripel auf lineare Unabhängigkeit:

a.) $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$ b.) $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ c.) $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$

7. Beweisen Sie, dass $\vec{a} \times \vec{b}, \vec{a} \times \vec{c}, \vec{a} \times \vec{d}$ komplanar sind. ($\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ beliebige Vektoren des $\mathbb{R}^3$)

8. Gegeben seien die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ \alpha \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{c} = \begin{bmatrix} \beta \\ 0 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \vec{d} = \begin{bmatrix} -1 \\ \gamma \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Der Vektor $\vec{a}$ soll orthogonal zu $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ sein. Wählen Sie dementsprechend die Parameter α, β, γ. Ortogonalisieren Sie anschließend die erhaltenen Vektoren.

9. Beweisen Sie:
$\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$
$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$
$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$

10. Bestimmen Sie die Parameterform, die Koordinatenform sowie die Hessesche Normalform der Ebene, welche die folgenden Punkte enthält:

a.) $\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}5\\2\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-3\\0\end{bmatrix}$, b.) $\begin{bmatrix}3\\2\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4\\3\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4\\3\\4\end{bmatrix}$

11. Berechnen Sie jeweils eine Normalenform und Koordinatenform für die gegebenen Ebenen.

a.) $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + p\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix} + q\begin{bmatrix}-2\\4\\1\end{bmatrix}$, b.) $\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix} + p\begin{bmatrix}4\\2\\-1\end{bmatrix} + q\begin{bmatrix}-3\\-3\\1\end{bmatrix}$

12. Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Ebenen und bestimmen Sie ggf. die Schnittgerade.

a.)g $= x - 2y + 3z = 2$, t $= \begin{bmatrix}6\\2\\6\end{bmatrix} + p\begin{bmatrix}3\\2\\5\end{bmatrix} + q\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$, b.) g $= x + 7y + 3z = 2$, t $= x + y + 5z = 1$

9 Selbsttest

1. Welcher Zusammenhang besteht zwischen der linearen Abhängigkeit von zwei Vektoren und der Lagebeziehung zwischen zwei Geraden?

2. Wann ist eine Ebene ein Unterraum des R^3?

3. $\vec{x_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \vec{x_2} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix} \vec{x_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 11 \end{bmatrix}, \vec{x_4} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 12 \end{bmatrix}$

Untersuchen Sie die folgenden Mengen darauf, ob es sich um lineare Unterräume handelt:
$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$
a.) $\{\alpha\vec{x_1} + \beta\vec{x_2} + \vec{x_3}\}$
b.) $\{\alpha\vec{x_1} + \beta\vec{x_2} + \gamma\vec{x_3}\}$
c.) $\{\alpha\vec{x_1} + \beta\vec{x_2} + \vec{x_4}\}$
d.) $\{\alpha\vec{x_1} + \beta\vec{x_2} + \gamma\vec{x_4}\}$
Wenn ja, geben Sie die Dimension und eine Basis an! Was stellen die Mengen geometrisch dar?

4. $\vec{x_1} = \begin{bmatrix} c \\ -5 \\ 4 \end{bmatrix}, \vec{x_2} = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}, \vec{x_3} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

Für welche Werte von c ist der Vektor $\vec{x_1}$ eine Linearkombination von $\vec{x_2}$ und $\vec{x_3}$?

5. In welchen Fällen handelt es sich bei den Mengen um Unterräume des $\mathbb{R}^3$? Was stellen die Mengen geometrisch dar?
$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

$$\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} c \\ -5 \\ 4 \end{bmatrix}\right\}, \left\{\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} c \\ -5 \\ 4 \end{bmatrix}\right\}$$

6. Beweisen Sie, dass die Vektoren $\vec{a}+\vec{b}$ und $\vec{a}-\vec{b}$ genau dann orthogonal sind wenn gilt: $\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\|$

7. Ermitteln Sie eine orthogonale Basis des $\mathbb{R}^3$, der der Vektor $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ angehört.

8. Drehen Sie den Punkt $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ um 30° um die Achse $\omega = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \\ 0 \end{bmatrix}$.

9. Berechnen Sie den Winkel zwischen den Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ wenn gilt:
$\|\vec{u}\| = 3, \|\vec{v}\| = 4, (2\vec{u} - \vec{v}) \perp (\vec{u} + \vec{v})$

10 Matrizen

Matrizen werden in der Informatik sehr häufig verwendet. Sie repräsentieren lineare Gleichungssysteme. Es ist häufig einfacher und schneller mit Matrizen zu arbeiten als Gleichungssysteme umzuformen.

Ein lineares Gleichungssystem wird wie folgt in eine Matrixschreibweise übertragen:

$$\begin{gathered} x + 3y + 6z = 25 \\ 2x + 7y + 14z = 58 \\ 2y + 5z = 19 \end{gathered} \qquad \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 7 & 14 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ 58 \\ 19 \end{bmatrix}$$

Die Gleichungen können ebenfalls als Ebenen im $\mathbb{R}^3$ betrachtet werden. Ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar, so gibt es nur einen Punkt an dem sich alle Ebenen schneiden. Die Koordinaten dieses Schnittpunkts geben die Lösung für x,y & z. Eine Visualisierung für das Beispiel kann hier gefunden werden: `https://www.geogebra.org/3d/e5srwur8`

10.1 Matrizen allgemein

Eine Matrix schreiben wir:

$$A := \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

Die **(m,n)-Matrix**(vom Typ(m,n)) besteht aus m Zeilen(-Vektoren) und n Spalten(-Vektoren). Inne hat sie die Elemente: a_{ik} mit $1 \leq i \leq m, 1 \leq k \leq n$.

10.1.1 Transposition

Alle Spaltenvektoren von $A_{(m,n)}$ sind in $A^T_{(m,n)}$ die Zeilenvektoren. Daraus folgt, dass $A^T_{(m,n)}$ vom Typ (n,m) ist.

10.1.2 Addition

$$A_{(m,n)} + B_{(m,n)} = (a_{ik} + b_{ik})_{(m,n)}$$

(Analog funktioniert die **Subtraktion**.)

10.1.3 Multiplikation mit Skalar

$$\lambda \cdot A_{(m,n)} = (\lambda \cdot a_{ik})_{(m,n)} \text{ mit } \lambda \in \mathbb{R}$$

10.1.4 Multiplikation

Bedingung: Damit $A \cdot B = C$ funktioniert muss gelten $A_{m,p}$ und $B_{p,n}$. Daraus resultiert $C_{m,n}$:

$$A \cdot B = C = \begin{bmatrix} (a_{1,1} \cdot b_{1,1} + \ldots + a_{1,p} \cdot b_{p,1}) & \dots & (a_{1,1} \cdot b_{1,n} + \ldots + a_{1,p} \cdot b_{p,n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{m,1} \cdot b_{1,1} + \ldots + a_{m,p} \cdot b_{p,1}) & \dots & (a_{m,1} \cdot b_{1,n} + \ldots + a_{m,p} \cdot b_{p,n}) \end{bmatrix}$$

In Worten: Das Element C_{ik} entspricht (i-te Zeile von A)$^T \cdot$(k-te Spalte von B).

Anmerkung:
Eine nette Visualisierung kann auf der Website: `http://matrixmultiplication.xyz/` gefunden werden.

10.2 Besondere Matrizen

10.2.1 Quadratische Matrix

Ist m=n, so heißt die Matrix **quadratisch**.

10.2.2 Symmetrische Matrix

Bei einer quadratische Matrix mit der Eigenschaft$A = A^T$ sprechen wir von einer Symmetrischen Matrix.

10.2.3 Nullmatrix

Sind alle Elemente der Matrix 0, sprechen wir von der **Nullmatrix**. Sie kommt in dieversen Typen(m,n) vor. Wenn sich der Typ aus dem Kontext ergibt schreibt man(etwa): $\mathbb{O}$

10.2.4 Einheitsmatrix

Die **Einheitsmatrix**, bzw. **Identität** ist wie folgt definiert:

$$I := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Die **Hauptdiagonalle** mit den Elementen $a_{1,1}, a_{2,2}, ..., a_{t,t} = 1$.

10.2.5 Dreicksmatrix

Von einer quadratischen (oberen bzw. unteren) Dreiecksmatrix sprechen wir, wenn für
$i > j \rightarrow a_{i,j} = 0$ bzw. $i < j \rightarrow a_{i,j} = 0$ gilt. Die **Determinante** solch einer Martix entspricht dem Produkt der Hauptdiagonalen. Man kann dieses Verfahren auch ausnutzen indem man eine beliebige Matrix in diese Form presst. (!Achtung!: Sobald man eine Zeile mit einem Faktor multipliziert, muss man diesen Faktor von der Determinante abziehen:z.B.: Zeile 3 = 2* Zeile3 - 5* Zeile7 , also muss die Det durch 2 geteilt werden, nicht jedoch durch 5.)

10.3 Determinanten

Von einer **quadratischen Matrix** können wir eine Determinante bestimmen, welche zum expliziten lösen von Gleichungssystemen oder für das Eigenwertproblem von Bedeutung sind.
Ist eine Determinante ungleich 0:

- so hat sie einen **vollen Rang**, also den Rang(A)=n und besitzt somit eine eindeutige Lösung
- Spalten, bzw. Zeilen sind **lin. unabhängig**
- so sprechen wir von einer regulären Matrix(ansonsten singulär)
- A ist **invertierbar**
- so existiert **kein Kern**

-Matrix vom Typ(2,2)

$$det(A) = det\left(\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix}\right) = (a_{1,1} \cdot a_{2,2}) - (a_{1,2} \cdot a_{2,1})$$

-Matrix vom Typ(3,3)[Regel von Sarrus]

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & - \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & - \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \pm \\ a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & + \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & + \end{bmatrix} =$$

$$(a_{1,1} \cdot a_{2,2} \cdot a_{3,3}) + (a_{2,1} \cdot a_{3,2} \cdot a_{1,3}) + (a_{3,1} \cdot a_{1,2} \cdot a_{2,3}) - (a_{3,1} \cdot a_{2,2} \cdot a_{1,3}) - (a_{1,1} \cdot a_{3,2} \cdot a_{2,3}) - (a_{2,1} \cdot a_{1,2} \cdot a_{3,3})$$

-Matrix vom Typ(n,n) Hat man eine Matrix A größer als (3,3), so kann man die Matrix entweder in eine Dreiecksform bringen und das Produkt der Hauptdiagonalen berechnen oder wie folgt vorgehen (basierend auf Laplaceschem Entwicklungssatz):

Wir wählen uns ein Element aus unserer Matrix aus. In unserem Fall suchen wir ein Element in einer Zeile oder Spalte mit möglichst vielen 0en. Im folgenden bezeichnen wir dieses Element als $a_{i,j}$.
Wir haben nun die Möglichkeit entweder nach der Zeile oder nach der Spalte, in welcher sich unser Element $a_{i,j}$ befindet, zu entwickeln.

Zeilenweise Entwicklung:
$\det(A_{i,j}) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{i,j} \cdot \det(A \text{ ohne i-te Zeile und j-te Spalte})$

Spaltenweise Entwicklung:
$\det(A_{i,j}) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{i,j} \cdot \det(A \text{ ohne i-te Zeile und j-te Spalte})$

Bsp:
$\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & -3 \end{bmatrix}\right) \rightarrow$ wir wählen die zweite Zeile, da sie eine 0 enthält.

Wir entwickeln zeilenweise. Ein spaltenweise Entwicklung liefert jedoch das gleiche Ergebnis.

$$\det(A) = -1 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \det\left(\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}\right) + 2 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}\right) + 0 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}\right)$$

$\det(A) = -19 - 46 + 0 = -65$

10.4 Invertierung

Das Inverse($A \cdot A^{-1} = I$) einer Matrix existiert nur bei Matritzen vom Typ(n,n), wessen Determinante ungleich 0 ist. Ist eine Matrix invertierbar, so ist sie **regulär**.
Inverse Matrizen sind nützlich, da gilt: $A \cdot x = B \to B \cdot A^{-1} = x$.
Wir können also über die Inverse Matrix unser Gleichungssystem lösen.

Gauß-Jordan Algorithmus:
Man schreibt $A \cdot A^{-1} = I$ als Gleichungssystem auf.

$$A \cdot A^{-1} = I = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a'_{1,1} & \dots & a'_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{n,1} & \dots & a'_{n,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$[A|I] = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} & | & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} & | & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \to [I|A^{-1}] = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & | & a'_{1,1} & \dots & a'_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & | & a'_{n,1} & \dots & a'_{n,n} \end{bmatrix}$$

Wir versuchen unsere zu invertierende Matrix A mit Hilfe von Operationen zwischen den Spalten zu I zu biegen. Genau dieser Operationen lassen wir parallel auf die Einheitsmatrix los. Während A zu I wird, wird I zu A^{-1}.

Adjunkte Berechnung:

$$A^{-1} = \tfrac{1}{det(A)} \cdot Adj(A)$$

$$Adj(A) = \hat{A}^T$$

$$\hat{A}_{i,j} = (-1)^{i+j} \cdot \text{ det(A - ohne Zeile i und Spalte j)}$$

Bsp:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{bmatrix}\right)} \cdot Adj\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \frac{1}{50 + 96 + 84 - 105 - 48 - 80} \cdot Adj\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \frac{1}{-3} \cdot \begin{bmatrix} \det\left(\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 10 \end{bmatrix}\right) & -\det\left(\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 10 \end{bmatrix}\right) & \det\left(\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}\right) \\ -\det\left(\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 10 \end{bmatrix}\right) & \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 10 \end{bmatrix}\right) & -\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}\right) \\ \det\left(\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}\right) & -\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}\right) & \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}\right) \end{bmatrix}^T$$

$$= \frac{1}{-3} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 4 & -11 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{bmatrix}^T$$

$$= \frac{1}{-3} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 2 & -11 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & 1 \\ -\frac{2}{3} & \frac{11}{3} & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

10.5 Abbildungsmatrizen

Von einer **linearen Abbildung** sprechen wir, wenn folgendes(Additivität und Homogenität) gilt:

$$A(X+Y) = A(X) + A(Y) \text{ und } A(\lambda \cdot X) = \lambda \cdot A(X)$$

$A \cdot \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \; A_{(m,n)}$
Bsp:
Überprüfen Sie ob es sich bei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ mit

$x = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2x^2 + y \\ -y \\ x \end{bmatrix}$ um eine lineare Abbildung handelt.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2x_1^2 + y_1 \\ -y_1 \\ x_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2x_2^2 + y_2 \\ -y_2 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2) \\ -(y_1 + y_2) \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2) \\ -(y_1 + y_2) \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1^2 + y_1 \\ -y_1 \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2x_2^2 + y_2 \\ -y_2 \\ x_2 \end{bmatrix} ?$$

$$\lambda \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to ? \begin{bmatrix} 2(\lambda \cdot x)^2 + \lambda \cdot y \\ -\lambda \cdot y \\ \lambda \cdot x \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 2x^2 + y \\ -y \\ x \end{bmatrix} ?$$

10.6 Kern

Der Kern einer Matrix ist nicht trivial(nur Nullvektor), wenn die Determinante der Matrix gleich 0 ist.

$$A \cdot \vec{V} = \begin{bmatrix} 0 \\ ... \\ 0 \end{bmatrix}$$

man schreibt dann:

$$ker(A) = \{\lambda \cdot \vec{V} | \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Bsp:

$\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}\right) = 0 \to$ Kern existiert, Dreiecksmatrix $\to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \to x + 2y + 3z = 0, -3y - 6z = 0, \to y = -2z$$

Wir dürfen x,y oder z frei wählen. Wählen wir für z = -1, so erhalten wir:

$$y = 2, x = -1 \to \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \to ker(A) = \left\{ \lambda \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} | \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

10.7 Rang

Der Rang einer Matrix ist gleich dem Rang der Menge an Spalten-, bzw. Zeilenvektoren. Sprich die Anzahl linear unabhängiger Vektoren.
(Bringen wir unsere Matrix in eine Dreiecksform, so entspricht der Rang der Anzahl der Zeilen, in welchen nicht nur 0en vorkommen). Betrachtet man die Zeilen oder Spalten der Matrix als Punkte im Raum, so ist der Rang der Matrix die Dimension des Unterraums, welcher alle Punkte beinhaltet.

10.8 Bild

Das Bild einer Matrix schreiben wir:

$$img(A) = \{\vec{a_1} \cdot \lambda_1, \vec{a_2} \cdot \lambda_2, ...|\lambda_1, \lambda_2, ... \in \mathbb{R}\}$$

Das Bild unserer Matrix zeigt welche Menge von Vektoren wir mittels linear Kombinationen aus Vektoren unserer Matrix erzeugen können. Sind alle Spaltenvektoren unabhängig, können wir sie($\vec{a_1}, ...$) wie oben aufschreiben. Die Vektoren, die lin. abhängig sind, lässt man weg.(In der Stufenform kann man das gut erkennen.)

10.9 Eigenwert und Eigenvektor

Eigenvektoren sind Vektoren, welche ihre Richtung nicht durch eine lineare Abbildung verändern. Sei $\vec{x}$ ein Eigenvektor und A die dazugehörige Matrix, so gilt:

$$A \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x}$$

Um die Eigenvektoren einer Matrix zu bestimmen ermitteln wir zuerst alle Eigenwerte.
Für alle Eigenwerte λ, muss gelten:

$$\det\left(\begin{bmatrix} a_{1,1}-\lambda & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2}-\lambda & a_{2,3} & \dots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3}-\lambda & \dots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & ... & a_{n,n}-\lambda \end{bmatrix}\right) = 0$$

Wir können die Eigenwerte folglich durch das Gleichsetzen der Determinante der Matrix, in welcher wir von jedem Element der Hauptdiagonalen Lambda subtrahiert haben, mit 0 unsere Eigenwerte bestimmen.

Haben wir unsere Eigenwerte bestimmt, so subtrahieren wir diese von der Hauptdiagonalen unserer ursprünglichen Matrix. Nun ermitteln wir den Kern der neuen Matrix. Alle so erhaltenen Vektoren entsprechen den Eigenvektoren unserer Matrix.

Betrachten wir die Matrix als Abbildung, so entsprechen die Eigenvektoren den Vektoren, welche ihre Richtung nach der Anwendung der Abbildung nicht geändert haben. Der Eigenwert des jeweiligen Eigenvektors gibt weiterhin den Streckungsfaktor an, um welchem der Eigenvektor nach Anwendung der Abbildung "gestreckt" wurde.

Bsp:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \det\left(\begin{bmatrix} -1-\lambda & -1 & 1 & 1 \\ -3 & 2-\lambda & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0-\lambda & 1 \\ -3 & 1 & 3 & 1-\lambda \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$= 0 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \det\left(\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2-\lambda & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 1-\lambda \end{bmatrix}\right) - 1 \cdot (-1)^{3+2} \cdot \det\left(\begin{bmatrix} -1-\lambda & 1 & 1 \\ -3 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 1-\lambda \end{bmatrix}\right)$$

$$-\lambda \cdot (-1)^{3+3} \cdot \det\left(\begin{bmatrix} -1-\lambda & -1 & 1 \\ -3 & 2-\lambda & 0 \\ -3 & 1 & 1-\lambda \end{bmatrix}\right) + 1 \cdot (-1)^{3+4} \cdot \det\left(\begin{bmatrix} -1-\lambda & -1 & 1 \\ -3 & 2-\lambda & 3 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}\right)$$

$$= 3\lambda^2 - 3\lambda + \lambda^4 - 2\lambda^3 - \lambda^2 + 2\lambda + 3\lambda - 3\lambda^2 = \lambda^4 - 2\lambda^3 - \lambda^2 + 2\lambda = 0 \rightarrow \lambda = -1, 0, 1, 2$$

Wir müssen nun für jeden Eigenwert den Kern berechnen.

In diesem Beispiel nutzen wir nur den Eigenwert -1.

$$ker\left(\begin{bmatrix} -1+1 & -1 & 1 & 1 \\ -3 & 2+1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0+1 & 1 \\ -3 & 1 & 3 & 1+1 \end{bmatrix}\right)$$

$\rightarrow -x_2 + x_3 + x_4 = 0, -3x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0, -x_2 + x_3 + x_4 = 0, -3x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0$

$\rightarrow \left\{ t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} | t \in \mathbb{R} \right\} \rightarrow$ der Vektor $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ist ein Eigenvektor der Matrix A

10.10 Beispielaufgaben

1. Lösen Sie die Gleichungssysteme grafisch und rechnerisch.
a.) $3x + 4y = 14, -5x + 2y = 20$
b.) $3x + 4y = 14, -6x - 8y = 14$
c.) $3x + 4y = 14, -6x - 8y = -28$

2. Berechnen Sie

a.) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 7 & 4 \\ 8 & 2 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}$ b.) $\begin{bmatrix} 7 & -2 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 7 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T$

3. Zeigen Sie, dass für beliebige Matritzen A die Matrix AA^T existiert und symetrisch ist.

4. Zeigen Sie, dass wenn A und B quadratische Matritzden der Ordnung n sind und $AB = BA$ gilt, dass dann $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$ ist.

5. Ermitteln Sie den Rang der Matrizen.

a.) $\begin{bmatrix} 1 & 12 & 5 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 8 & 4 \end{bmatrix}$ b.) $\begin{bmatrix} 1 & 12 & 5 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & 8 & 4 \end{bmatrix}$ c.) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 3 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

Geben Sie weiterhin die Determinante für a.) und b.) an. Welcher Zusammenhang besteht zum Rang?

6.) Bestimmen Sie den Rang der Matrix $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 4 & 5 \\ 2 & 7 & a & b & c \end{bmatrix}$ in Abhängigkeit von a,b,c.

7.) Lösen Sie mit dem Gaußschen Algorithmus die Gleichungssysteme.
a.) $x - 2y + 3z = 0, 3x + y - 5z = 0, 2x - 3y + 3z = 0$
b.) $x - 2y + 3z = 0, 3x + y - 5z = 0, 5x - 3y + z = 0$
c.) $x - 2y + 3z = 0, -2x + 4y - 6z = 0, 3x - 6y + 9z = 0$
Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Lösungsmengen der Gleichungssysteme, der Anzahl der Variablen und Gleichungen und den Rängen der Koeffizientenmatrizen?

8.) Berechnen Sie die Determinante der Matrix $\begin{bmatrix} 5 & 2 & a \\ 4 & 3 & 7 \\ 1 & 4 & 18 \end{bmatrix}$ sowie der Matrix $\begin{bmatrix} 5 & 0 & c & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & -4 & 0 & 0 \\ b & 2 & 3 & 1 & b & 10 \\ 3 & 1 & 1 & 4 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 7 & b & -2 & 7 \end{bmatrix}$

9.) Berechnen Sie die Inverse der Matrix $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -5 \\ 2 & -3 & 3 \end{bmatrix}$ einmal mithilfe von Adjunkten und einmal mit Gauß.

10.) Invertieren Sie die Matrix $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 9 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 12 & 5 \end{bmatrix}$

11.) Bestimmen Sie die Eigenwerte, Eigenvektoren und die Determinante der Matrix $\begin{bmatrix} 3 & 4 & -3 \\ 2 & 7 & -4 \\ 3 & 9 & -5 \end{bmatrix}$

12.) Sei $f : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 4x - y + z \\ 6(y + z) - x \\ 3x \end{bmatrix}$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass f eine lineare Abbildung ist.

Geben Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren an.

13.) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix A $= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 2 & 2a \end{bmatrix}$ mit $a \in \mathbb{R}$.

14.) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenwerte der Matrix A $= \begin{bmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$

Es wurden in diesem Tutorium nicht alle möglichen Themengebiete der Klausur behandelt. Der Fokus lag auf den Hauptthemen. Ihr solltet euch über die Inhalte dieses Tutoriums hinaus mit den Unterlagen aus Vorlesung und Übung auf die Klausur vorbereiten!

Ich wünsche euch viel Glück für die Klausur und drücke euch die Daumen!
Persönlicher Tipp: Tee trinken vor und während der Klausur hilft eventuell gegen Unruhe

11 Tools & Rechenhilfen

11.1 Paskalsche Dreieck

$n=0$							1						
$n=1$						1		1					
$n=2$					1		2		1				
$n=3$				1		3		3		1			
$n=4$			1		4		6		4		1		
$n=5$		1		5		10		10		5		1	
$n=6$	1		6		15		20		15		6		1

Das Dreieck kann je nach benötigtem n erweitert werden.

$(a+b)^2 \to 1 \cdot a^2b^0 + 2 \cdot a^1b^1 + 1 \cdot a^0b^2$
$(a+b)^3 \to 1 \cdot a^3b^0 + 3 \cdot a^2b^1 + 3 \cdot a^1b^2 + 1 \cdot a^0b^3$

$(a+b)^4 \to 1 \cdot a^4b^0 + 4 \cdot a^3b^1 + 6 \cdot a^2b^2 + 4 \cdot a^1b^3 + 1 \cdot a^0b^4$
$(a+b)^5 \to 1 \cdot a^5b^0 + 5 \cdot a^4b^1 + 10 \cdot a^3b^2 + 10 \cdot a^2b^3 + 5 \cdot a^1b^4 + 1 \cdot a^0b^5$

11.2 Polynomdivision

11.3 Rechenhilfen

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$$

$$\frac{2x-1}{x-2} = \frac{2x-1-3+3}{x-2} = \frac{2x-4+3}{x-2} = \frac{2x-4}{x-2} + \frac{3}{x-2} = 2 + \frac{3}{x-2}$$

Um sich weiter auf die Klausur vorzubereiten können zusätzlich zu den Übungen & Aufgaben aus dem Tutorium auch Aufgaben von anderen Universitäten genutzt werden, um den in der Vorlesung unterrichteten Stoff zu festigen.

Ein gutes Beispiel wäre hierbei die Aufgabensammlung der TU-Chemniz:
`https://www-user.tu-chemnitz.de/~rhaf/Aufgabensammlung/Sammlung/Aufgabensammlung.pdf`

Auch empfehlenswert für das tiefere Verständnis ist die Youtube-Playlist über lineare Algebra von 3Blue1Brown:
`https://www.youtube.com/watch?v=fNk_zzaMoSs&list=PLZHQObOWTQDPD3MizzM2xVFitgF8hE_ab`