Analysis - Tutorium

Anton Lammert

January 15, 2020

1 Info

Dies ist eine Sammlung der Tutoriumsmaterialien.
Sie versucht ein Grundverständnis der Probleme sowie ihrer Lösungen zu vermitteln.
Für ihre Korrektheit und Vollständigkeit wird nicht garantiert!
In der Vorlesung und Übung werden weitere Themen besprochen, welche ebenfalls Klausurrelevant sind. Die Zusammenfassung ist somit kein Ersatz für die Vorlesung und Übung.

Fragen: **anton.benjamin.lammert@uni-weimar.de**

Die Sammlung wurde von Phil Hagen Jungschlaeger und Lucas Sebastian Hübner übernommen und angepasst.

Termin: Jeden Dienstag 13:30 Uhr, HK7 kleiner Hörsaal

Vor der Klausur wird es eine Probeklausur geben, welche ihr unter Klausurbedingungen bearbeiten könnt.
Es ist ratsam diese Möglichkeit zu nutzen um sich auf die Klausur vorzubereiten.

Alle in der Übung gestellten Aufgaben lassen sich auf Moodle zusätzlich zu Übungsaufgaben finden.
Zur zeitnahen Bearbeitung der Übungsblätter wird geraten. Sie dient nicht nur der Festigung des Grundverständnisses sondern kann sich positiv auf die Note nach dem Bestehen der Klausur auswirken!

Eine gute Videoreihe zu vielen Themen der Vorlesung könnt ihr **hier** finden.

Contents

2 Folgen und Reihen

2.1 Folgen

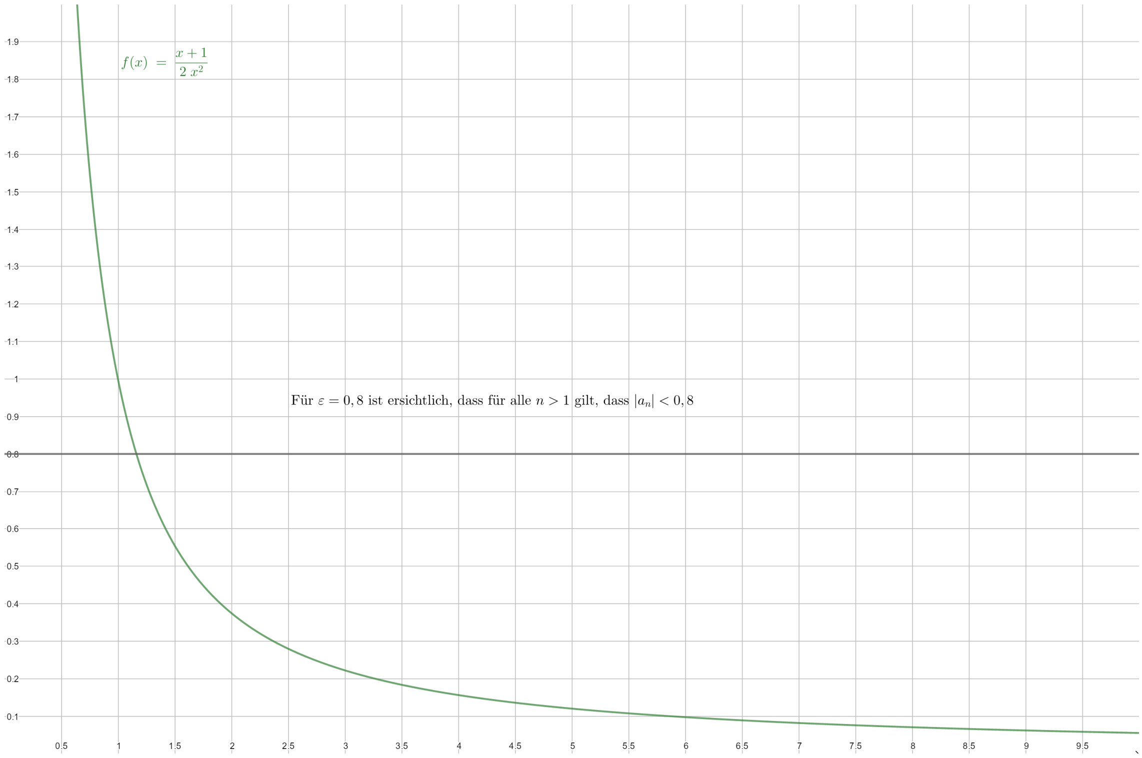
Eine Folge beschreibt eine Vorschrift $f(n)$ bei welcher jeder natürlichen Zahl n eine reelle Zahl a_n zugeordnet wird. Formal geschrieben $a_n := f(n)$ wobei n teilweise auch als Index bezeichnet wird.

Ähnlich der Funktionsanalyse existieren auch für Folgen die Begriffe monoton wachsend/fallend, streng monoton wachsend/fallend sowie beschränkt.

Falls ihr komplexe Folgen analysiert, ist es immer sinnvoll und hilfreich sie auf bereits bewiesene Folgen zu reduzieren.

2.1.1 Nullfolgen

Null-Folgen bezeichnen Folgen, welche die Eigenschaft besitzen, dass es für jedes $\varepsilon > 0$ einen Index gibt, ab welchem alle folgenden Werte der Folge betragsmäßig kleiner als ε sind.
Ist a_n eine Nullfolge so schreibt man $a_n \to 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} = 0$ oder $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$



Beispiele für elementare Nullfolgen sind:

$a_n := \frac{1}{n} \quad \to 0$
$a_n := q^n \quad \to 0$ falls $|q| < 1$ (Geometrische Folge)

2.1.2 Konvergente Folgen

a_n ist dann eine konvergente Folge, die gegen a konvergiert, wenn $a_n - a$ eine Nullfolge ist.

$a_n := (1 + \frac{a}{n})^n \quad \to e^a$
$a_n := \sqrt[n]{n} \quad \to 1$
$a_n := \sqrt[n]{c} \quad \to 1, \forall c > 0$
$a_n := u(n)^{v(n)} \quad \to e^{\lim\limits_{n\to\infty}(1-u(n))\cdot v(n)}$

2.1.3 Operationen mit Folgen

Sind $a_n \to a$ und $b_n \to b, a, b \in \mathbb{R}$ konvergente Folgen, so gilt:

$$c_n = a_n + b_n \Rightarrow c_n \to a + b$$
$$c_n = a_n - b_n \Rightarrow c_n \to a - b$$
$$c_n = a_n \cdot b_n \Rightarrow c_n \to a \cdot b$$

Bei der Division von zwei Folgen muss aufgepasst werden!

$$c_n = \frac{a_n}{b_n} \Rightarrow c_n \to \frac{a}{b} \text{ wenn } b \neq 0 \text{ und } b_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

Häufig ist es sinnvoll die Konvergenz einer Folge durch andere Folgen mit bekannter Konvergenz abzuschätzen.

Bsp.:

$$a_n \to g, b_n \to g, a_n \leq c_n \leq b_n, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow c_n \to g$$

2.1.4 Beispielaufgaben

Untersuchen Sie die folgenden Folgen auf Konvergenz:
Beispiel:
$a_n := \frac{17n^5+128n^3+1100n+5}{n^6+22n^2+15}$

$\frac{n^5\cdot(17+128\cdot\frac{1}{n^2}+1100\cdot\frac{1}{n^4}+5\cdot\frac{1}{n^5})}{n^6\cdot(1+22\cdot\frac{1}{n^4}+15\cdot\frac{1}{n^6})} \Rightarrow \frac{n^5\cdot 17}{n^6} = \frac{17\cdot\frac{1}{n}}{1} \Rightarrow a_n \to 0$

1. $a_n := \frac{3n^2-5n+7}{-9n^2+6n-3} \to -\frac{1}{3}$
2. $a_n := \frac{n^2\cdot(n+2n)-1}{(2-n)^2} \to$ divergent
3. $a_n := (1+\frac{7}{n})^n$
4. $a_n := \frac{7n^3-n-3n^3+n^2}{(2n+1)^3} \quad \to \frac{1}{2}$ Tipp: **Pascal's Dreieck**
5. Wählt b und k $\in N$, sodass die Folge: $a_n := \frac{b\cdot n^k-n}{n^6-3n}$
   - divergiert, $\to$ falls (k>6 und b>0)
   - eine Null-Folge wird, $\to$ falls (k<6) oder falls (b==0)
   - zur 42 konvergiert $\to$ falls (k==6 und b==42)
6. $a_n := \sqrt[n]{3}\cdot(1+\frac{1}{n})^n \to e$
7. $a_n := (1+\frac{1}{3n})^{2n} \to \frac{2}{3}$
8. $a_n := \frac{3^n+(-3)^n}{6^n} + \frac{2n^2-n+7}{5n^2-5n+4} \to \frac{2}{5}$
9. $a_n := 9 + \sqrt[2]{n} - \sqrt[2]{n-1} \to 9$
10. $a_n := \sqrt[n]{1+x^n} \to 1$ wenn $|x| \leq 1, x$ wenn $|x| > 1$

Tipp: Falls ihr Aufgaben alleine lösen wollt, checkt eure Ergebnisse mit WolframAlpha oder Maple!

2.2 Reihen

Eine Reihe beschreibt die Summe der Elemente einer Folge a_n.
Sei s_n eine Reihe, welche durch die Folge a_n gegeben ist, dann gilt:

$$s_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ bzw. } a_0 + a_1 + a_2 + ...$$

Eine Reihe konvergiert, wenn der Grenzwert der Summe existiert.
Gilt weiterhin, dass $s_n = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konvergiert, so bezeichnet man s_n als absolut komvergent.

2.2.1 Konvergenznachweis

Wenn ihr Reihen betrachtet, untersucht zuerst ob es sich bei der Folge der Reihe um eine Nullfolge handelt. Ist dies nicht der Fall, so divergiert die Reihe. Es reicht jedoch nicht aus nur nachzuweisen, dass es sich bei a_n um eine Nullfolge handelt.
Ein Beispiel hierfür wäre die harmonische Reihe $s_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, welche klar divergiert.
Handelt es sich bei der zu untersuchenden Reihe um eine Nullfolge, so können die folgenden Kriterien zur Untersuchung der Konvergenz genutzt werden:

- Leibniz-Kriterium
  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n$ ist konvergent, falls $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, $a_n \geq 0$ und $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq a_{n+1}$

- Cauchy-Kriterium

  Eine Reihe ist konvergent, falls $\forall \epsilon\ \exists n_0 \in N$: $\left| \sum_{n=k+1}^{m} a_n \right| < \epsilon, \quad \forall k, m > n_0$

  Eine gute Erklärung des Cauchy-Kriteriums findet ihr **hier**.

- Monotonie-Kriterium
  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert falls $a_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ und die Folge der Partialsummen beschränkt ist

- Quotienten-Kriterium

  $$\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = k, \text{ falls } \begin{cases} k < 1 \to & \text{konvergiert} \\ k = 1 \to & \text{keine Aussage möglich} \\ k > 1 \to & \text{divergiert} \end{cases}$$

- Wurzel-Kriterium

  $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = k, \text{ falls } \begin{cases} k < 1 \to & \text{konvergiert} \\ k = 1 \to & \text{keine Aussage möglich} \\ k > 1 \to & \text{divergiert} \end{cases}$$

- Majoranten-Kriterium
  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert, genau dann wenn $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergiert und $\forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq b_n$

- Minoranten-Kriterium
  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergiert, genau dann wenn $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ divergiert und $\forall n \in \mathbb{N} : b_n \leq a_n$

2.2.2 Konvergente Reihen

Ihr solltet bereits bewiesene Reihen kennen um sie nutzen zu können!

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ $\rightarrow$konvergiert falls $\alpha > 1$
- $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ $\rightarrow e$
- $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_0 \cdot q^n)$ $\rightarrow \frac{a_0}{1-q}$ für $|q| < 1$

2.2.3 Operationen mit Reihen

Sind $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergente Reihen, so gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \pm b_n \text{ konvergiert}$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda \cdot a_n, \lambda \in \mathbb{R} \text{ konvergiert}$$

2.2.4 Partialbruchzerlegung

Bei der Untersuchung der Partialsummen einer Reihe ist es oftmals notwendig diese gezielt umzuformen. Hierfür wird die Partialbruchzerlegung genutzt:

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{P}{A \cdot B} \rightarrow P = C \cdot B + D \cdot A \rightarrow \frac{P}{A \cdot B} = \frac{C}{A} + \frac{D}{B}$$

Beispiel: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (n+1)}$

$\Rightarrow A = n, B = n+1, P = 1$

$\Rightarrow \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{C}{n} + \frac{D}{n+1} = \frac{C \cdot (n+1) + D \cdot n}{n^2+n}$

$\Rightarrow 1 = C \cdot (n+1) + D \cdot n \quad \Rightarrow 1 = (C+D) \cdot n + C \cdot 1 \quad \Rightarrow C = 1, D = -1$

$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = (\frac{1}{1} - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + ... + (\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}) + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = 1 - \frac{1}{n+1}$

2.2.5 Beispielaufgaben

Beispiel:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} \cdot (x+1)^n$

$\Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{3^n + (-2)^n}{n} \cdot (x+1)^n \right|} < 1?$

$\Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} \left(\left| \frac{3^n + (-2)^n}{n} \cdot (x+1)^n \right| \right)^{\frac{1}{n}} < 1?$

$\Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} \left| (\frac{3^n + (-2)^n}{n})^{\frac{1}{n}} \cdot ((x+1)^n)^{\frac{1}{n}} \right| < 1?$

$\Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} \left| (\frac{3^n \cdot (1 + (-\frac{2}{3})^n)}{n})^{\frac{1}{n}} \cdot (x+1) \right| < 1?$

$\Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} \left| 3 \cdot (\frac{1 + (-\frac{2}{3})^n}{n})^{\frac{1}{n}} \cdot (x+1) \right| < 1?$

$\Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} \left| 3 \cdot (\frac{1 + 1^n}{n})^{\frac{1}{n}} \cdot (x+1) \right| < 1?$

$\Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} \left| 3 \cdot (\frac{2}{n})^{\frac{1}{n}} \cdot (x+1) \right| < 1?$

$\Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} \left| 3 \cdot (2 \cdot \frac{1}{n})^{\frac{1}{n}} \cdot (x+1) \right| < 1?$

$\Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} \left| 3 \cdot 2^{\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{n}^{\frac{1}{n}} \cdot (x+1) \right| < 1?$

$\Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} |3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (x+1)| < 1?$

$\Rightarrow |3 \cdot (x+1)| < 1?$

$\Rightarrow -1 < 3x + 3 < 1 \Rightarrow -4 < 3x < -2 \Rightarrow -\frac{4}{3} < x < -\frac{2}{3}$

1. $\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{n}{n+1})^{n^2}$

2. $\sum_{n=k+1}^{2k} \frac{1}{n}, \quad k \in \mathbb{N}$

3. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{5 \cdot 3^n}$

4. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{n(n+1)}}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n-1} - \sqrt{n})$

   Tipp: Harmonische Reihe: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{n}{4n+1})^n$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} (x+2)^n \cdot (1+\frac{1}{n})^n \quad x \in R$

9. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2n+1}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (n+1)}$

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$

13. $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{n+1}{9n})^n$

14. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n+9}$

15. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n^n}$

16. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n+1}{2^n}$

    Zeigt anschließend mit voll. Indukt. die Darstellung s_n der Reihe.

    $s_n = \frac{1}{9} \cdot (4 + (-1)^n \cdot \frac{3n+5}{2^n}) \quad , \qquad n = 0, 1, 2...$

3 Kontinuität und Differenzierbarkeit

3.1 Analyse der Kontinuität

Die wahrscheinlich einfachste umgangssprachliche Beschreibung der Stetigkeit einer Funktion wäre: "Wenn ich es mit einem Stiftzug zeichnen kann, ohne heben oder Sprünge, so ist es stetig!"

3.1.1 Definition

Formal ausgedrückt: $f(x) : D \to R$ ist stetig, wenn für alle $x_n \subset D$ mit $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$ gilt: $\lim_{x\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.
Um dies für unsere Funktionen nachzuweisen, müssen wir uns die kritischen Stellen genauer anschauen.

- Rechter-Grenzwert
  $f(x_0^+) := \lim_{x\to x_0^+} f(x) = c_1$
- Linker-Grenzwert
  $f(x_0^-) := \lim_{x\to x_0^-} f(x) = c_2$

Falls $x_0 \Leftrightarrow c_1, c_2$ existiert und $c_1 = c_2$, so ist f stetig.
Falls f nicht stetig ist, so unterscheiden wir zwei Arten der Unstetigkeit.

Unstetigkeit 1.Art:

- **Hebbar** wenn $x_0 \notin D$. Falls dies der Fall ist machen wir die Funktion stetig indem wir sie ergänzen
  $\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) \text{ für } x \neq x_0 \to \text{nun stetig in } x_0 \\ f(x_0^-) \text{ für } x = x_0 \end{cases}$
- **Sprung** wenn $x_0 \in D$ und $\lim_{n\to\infty^{+/-}} f(x_n) \neq f(x_0)$
  in diesem Fall bezeichnet $|f(x_0^+) - f(x_0^-)|$ die Sprunghöhe

Unstetigkeit 2.Art (**Essentielle Unstetigkeit**):

- $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = \infty$ falls dies derFall nennen wir x_0 eine Polstelle
- $\lim_{x\to x_0^{+/-}} f(x)$ nicht existiert

3.1.2 Operationen mit stetigen Funktionen

Sind $f(x)$ und $g(x)$ stetig, so gilt:

$$f(x) \pm g(x) \text{ ist stetig}$$
$$f(x) \cdot g(x) \text{ ist stetig}$$
$$\frac{f(x)}{g(x)} \text{ ist stetig, wenn } \forall x : g(x) \neq 0$$

Hieraus wird deutlich, dass alle Polynome stetig sind.

0cmManchmal ist es hilfreich/notwendig die Regel von l'Hospital zu verwenden. **L'Hospital**:

- Situation: $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ und $\lim_{x\to c} f(x) = l \lim_{x\to c} g(x) = 0$ oder $\pm\infty$ und $g'(x) \neq 0$:
  $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

3.1.3 Beispielaufgaben

1. $f(x_1) = \begin{cases} x-1, & x \leq 1 \\ 1-x, & x > 1 \end{cases}$

2. $f(x_2) = \begin{cases} \frac{\ln(x)}{(x-1)}, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$

3. $f(x_3) = \frac{x^2-9}{2x^3+54}$

4. $f(x_4) = \frac{(x-1)\cdot(x+7)}{2(x+2)\cdot(x-1)}$

5. $f(x_4) = \begin{cases} \sin \frac{(x-1)(x+7)}{x^2+6x+7} & , x \neq 0 \\ \cos \ \pi & , x = 0 \end{cases}$

6. $f(x_6) = \begin{cases} x \cdot \sin(\frac{1}{x}), & x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$

7. $f(x_7) = \begin{cases} x+2 & , x < -1 \\ x^2 & , -1 \leq x < 1.5 \\ x & , 1.5 \leq x \end{cases} \qquad \forall x \in (-\infty,\ -1) \cup (-1,\ 1.5) \cup (1.5,\ \infty)$

3.2 Analyse der Differenzierbarkeit

Eine differenzierbare Funktion ist immer stetig. Eine stetige Funktion ist nicht unbedingt differenzierbar.

3.2.1 Definition

Man kann zwischen zwei ähnlichen Methoden/Ansätzen unterscheiden um die Differenzierbarkeit einer Funktion ($f(x)$) in einem ausgewählten Punkt(x_0) oder bezüglich aller Punkte, also dem gesamten Definitionsbereich zu untersuchen.

- x-methode: $f'(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$
- h-methode: $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

Wenn der Grenzwert an einem Punkt x_0 oder für den gesamten Definitionsbereich existiert, so ist die Funktion differenzierbar. Wie immer ist es hilfreich bereits bewiesene Standard-Grenzwert zum Rechnen und Kombinieren im Hinterkopf zu haben:

- $\lim\limits_{n \to \infty} (1 + \frac{a}{n})^n = e^a$
- $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1$
- $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$ for a>1, k in IN
- $\lim\limits_{n \to 0} \frac{\sin(n)}{n} = 1$
- $\lim\limits_{n \to 0} n^n = e^0$
- $\lim\limits_{n \to 0} \frac{\cos(n)-1}{n} = 0$

3.2.2 Beispielaufgaben

Untersuche die folgenden Funktionen auf Differenzierbarkeit und berechnen sie wenn vorhanden den Wert der Ableitung in x_0= 42.

Beispiel: $f(x) = x \cdot |x| \Rightarrow$

$$f(x) = \begin{cases} -x^2, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$$

Damit $f(x)$ differnzierbar sein kann, muss $f(x)$ stetig sein.
Ist $f(x)$ stetig? Da $-x^2$ und x^2 stetig sind muss nur überprüft werden ob
$\lim\limits_{x \to 0^-} -x^2 = \lim\limits_{x \to 0} x^2 = \lim\limits_{x \to 0^+} x^2$ ist.
$\Rightarrow -0^2 = 0^2 = 0^2$.
Da dies der Fall ist, ist $f(x)$ stetig.
Damit $f(x)$ muss weiterhin gelten, dass die Anstiege für x gegen 0 identisch sind.
$\lim\limits_{x \to 0^-} -2x = \lim\limits_{x \to 0} 2x$.
$\Rightarrow -2 \cdot 0 = 2 \cdot 0$
Da dies auch der Fall ist, ist $f(x)$ differenzierbar.

1. $f(x) = 0.125x^3$
2. $f(x) = \frac{1}{x}$
3. $f(x) = \begin{cases} (x-1)^3, & x < 1 \\ (x-1)^2, & x \geq \end{cases}$

4. $f(x) = \begin{cases} ax^2 + b, & x \geq 1 \\ x, & x < 1 \end{cases}$ wählen Sie a und b so, dass f(x) differenzierbar ist

5. $f(x) = \frac{x^2-9}{2x^3+54}$

6. Zeigen Sie, dass $\frac{d}{dx} ax^b = bax^{b-1}$ Tipp: Pascalsches Dreieck

7. $f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin(\frac{1}{x}), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

3.3 Standard-Ableitungen

Desweiteren lohnt es sich bereits bewiesene Standard-Ableitungen an der Hand zu haben:

- $\frac{d}{dx} ax^b = bax^{b-1}$
- $\frac{d}{dx} e^x = e^x$
- $\frac{d}{dx} a^x = \frac{d}{dx} e^{\ln a^x} = \frac{d}{dx} e^{x \cdot \ln a} = a^x \cdot \ln(a)$
- $\frac{d}{dx} \tan(x) = \frac{1}{\cos(x)^2} = \tan(x)^2 + 1$
- $\frac{d}{dx} \arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\frac{d}{dx} \arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$
- $\frac{d}{dx} x^x = x^x \cdot (1 + \ln(x))$
- $\frac{d}{dx} \cot(x) = \frac{-1}{\sin(x)^2}$
- $\frac{d}{dx} \arccos(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\frac{d}{dx} \frac{1}{x^n} = \frac{-n}{x^{n+1}}$
- $\frac{d}{dx} \ln(f(x)) = \frac{f(x)'}{f(x)}$ **Erklärung**

3.4 Ableitungsregeln für algebraische Operationen

Mit der x- und h-methode kann man die folgenden Regeln beweisen:

- Addition: $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$ Analog die Subtraktion
- Vielfache einer Funktion: $(\lambda f)'(x) = \lambda \cdot f'(x)$
- Reziprok: $(\frac{1}{f})'(x) = -\frac{f'(x)}{f^2}$
- **Produkt-Regel**: $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
- **Divisions-Regel**: $(\frac{f}{g})'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2}$
- **Ketten Regel**: $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) = f' \circ g(x) \cdot g'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

3.5 Beispielaufgaben

1. $\frac{d}{dx}x^2 + e^{-x^2}$ und $\frac{d^2}{dx^2}x^2 + e^{-x^2}$
2. $\frac{d}{dx}\sqrt{x^2+9}$
3. $\frac{d}{dx}x^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$
4. $\frac{d}{dx}\frac{\ln(42x^2)}{x}$
5. Beweise die Addtions und/oder Multiplikationsregel mit Hilfe der h-method.
   → **Hilfe**
6. $\frac{d^3}{dx^3}e^x \cdot \cos(x)$
7. Beweise die Divisionsregel mit Hilfe der Multiplikations- und Kettenregel
8. $\frac{d^2}{dx^2}\frac{\mathrm{e}^x+3^x}{x}$
9. $\frac{d}{dx}\ln\sqrt{x^3 \cdot e^{2x} \cdot \ln x}$

4 Taylor Entwicklung

Die Taylor Entwicklung erlaubt es euch, durch bekannte Werte der Ableitungen einer Funktion $f(x)$ an einem festen Punkt x_0 eine Approximation der Funktion $f(x)$ zu berechnen.
Ein interessantes Video hierzu kann **hier** und eine interessante interaktive Visualisierung **hier** oder **hier** gefunden werden.

4.1 Definition

Das n-te Taylorpolynom an der Stelle x_0 ist gegeben durch:

- Taylor-Polynom-Formel: $T_{x_0,n}(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)\cdot(x-x_0)^k}{k!}$
- Taylor-Restglied-Formel: $R_{x_0,n}(x) = f(x) - T_{n-1}(x) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x-x_0)^{n+1}$

4.2 Beispielaufgaben

Beispiel:
Bestimmen Sie das Taylorpolynom 4'ten Grades, für $f(x) = e^x \cdot \cos x$ für $x \in [0, \frac{1}{2}], x_0 = 0$ und schätzen Sie den maximalen Fehler der Approximation ab.

$f(x) = e^x \cdot \cos(x)$
$f(x)^1 = -e^x \cdot \sin(x) + e^x \cdot \cos(x) = e^x \cdot (\cos(x) - \sin(x))$
$f(x)^2 = e^x \cdot (-\sin(x) - \cos(x)) + e^x \cdot (\cos(x) - \sin(x)) = -2e^x \cdot \sin(x)$
$f(x)^3 = -2e^x \cdot \cos(x) - 2e^x \cdot \sin(x) = -2e^x \cdot (\cos(x) + \sin(x))$
$f(x)^4 = -2e^x \cdot (-\sin(x) + \cos(x)) - 2e^x \cdot (\cos(x) + \sin(x)) = -4e^x \cdot \cos(x)$
$f(x)^5 = 4e^x \cdot \sin(x) - 4e^x \cdot \cos(x) = 4e^x \cdot (\sin(x) - \cos(x))$

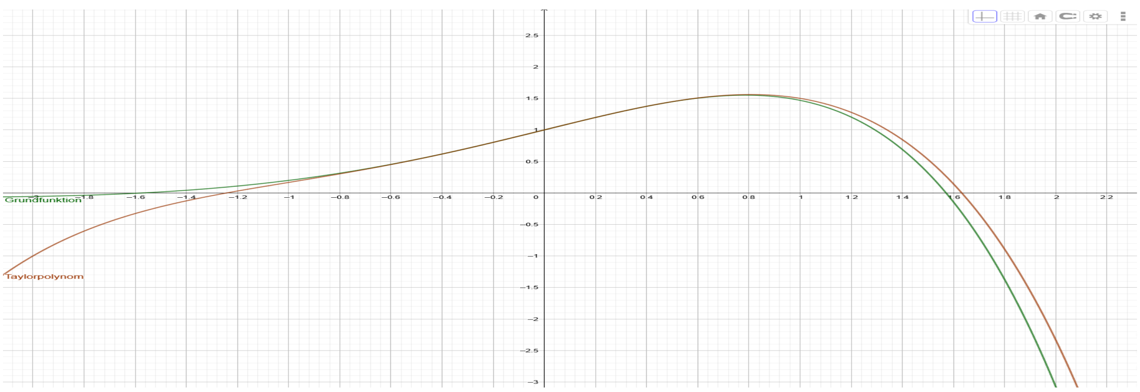
$\rightarrow T_4(x) = \frac{f(x_0)}{0!} \cdot (x-x_0)^0 + \frac{f^1(x_0)}{1!} \cdot (x-x_0)^1 + \frac{f^2(x_0)}{2!} \cdot (x-x_0)^2 + \frac{f^3(x_0)}{3!} \cdot (x-x_0)^3 + \frac{f^4(x_0)}{4!} \cdot (x-x_0)^4$
$= \frac{e^0 \cdot \cos(0)}{0!} \cdot 1 + \frac{e^0 \cdot (\cos(0) - \sin(0))}{1!} \cdot x - \frac{2e^0 \cdot \sin(0)}{2!} \cdot x^2 - \frac{2e^0 \cdot (\cos(0) + \sin(0))}{3!} \cdot x^3 - \frac{4e^0 \cdot \cos(0)}{4!} \cdot x^4$
$= 1 + x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4$

$\rightarrow R_4(x) = \frac{f^5(\xi)}{5!} \cdot x^5$
$= \frac{4e^\xi \cdot (\sin(\xi) - \cos(\xi))}{5!} \cdot x^5$

Für die Abschätzung des maximalen Fehlers im gegebenen Intervall suchen wir:
$\max\limits_{\xi \in [0, \frac{1}{2}]} |4e^\xi \cdot (\sin(\xi) - \cos(\xi))|$. Es gilt: $|4e^\xi \cdot (\sin(\xi) - \cos(\xi))| \leq 4e^{\frac{1}{2}}$

Wir ersetzen also $4e^\xi \cdot (\sin(\xi) - \cos(\xi))$ durch $4e^{\frac{1}{2}}$ und erhalten: $|R_4(x)| \leq \frac{4e^{\frac{1}{2}}}{5!} \cdot x^5, \forall x \in [0, \frac{1}{2}]$
Wir suchen nun das x, für welches der Term maximal wird. Dies ist der Fall für $x = \frac{1}{2}$.

Wir wissen also, dass $|f(x) - T_4(x)| \leq \frac{4e^{\frac{1}{2}}}{5!} \cdot \frac{1}{2}^5$ für $x \in [0, \frac{1}{2}]$.



1. Bestimmen Sie $T_2(x)$ und $R_2(x)$ für $f(x) = 2^{2x+2}, x \in [-1, 1), x_0 = 0$
2. Bestimmen Sie $T_2(X)$ und $R_2(x)$ für die Funktion $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}, x_0 = 2, x \in [1, 4]$ überprüfen Sie zuerst die Differenzierbarkeit von $f(x)$!
3. Bestimmen Sie $T_3(X)$ und $R_3(X)$ für $f(x) = \sqrt{1+x}, x_0 = 0$ und schätzen Sie den Fehler ab, der entsteht wenn man über $T_3(x)$ das Ergebnis von $\sqrt{\frac{3}{2}}$ berechnet.
4. Entwickeln Sie $f(x) = e^{\sin(x)} - a \cdot x$ an der Stelle x_0 bis zum kubischen Glied ($T_3(x)$).

5 Nullstellen-Findungs-Verfahren

Im Allgemeinen geht es bei den folgenden Nullstellen Verfahren darum sich einer unbekannten Nullstelle Stück für Stück zu anzunähern.

5.1 Bisektions-Verfahren

Damit diese Methode funktioniert, müssen keine Voraussetzungen erfüllt sein. Die Wahl des Startintervalls ist jedoch wichtig, wenn die Funktion potentiell mehrere Nullstellen besitzt!
Die Idee hinter dem Bisektions-Verfahren kommt von dem Fakt, dass $\operatorname{sign}(f(x_l)) = -\operatorname{sign}(f(x_r))$, für $x_l < x_0 < x_r$, wenn $f(x_0) = 0$ und es keine weiteren Nullstellen im Intervall $[x_l, x_r]$ gibt.

Wähle Start-Intervall $[a_0, b_0]$.

- $f(a_0) \cdot f(b_0) < 0$ teile Interval $[a_0,\ b_0]$ in Hälfte, untersuche die Hälften
- $f(a_0) \cdot f(b_0) > 0$ Nullstelle nicht im Interval $[a_0,\ b_0]$
- $f(a_0) \cdot f(b_0) = 0$ tatsächliche Nullstelle gefunden

Das ganze könnt ihr wiederhole bis ihr die gewünschte Genauigkeit erzielt habt.

5.2 Newton-Verfahren

Für dieses Verfahren muss die Funktion stetig differenzierbar sein!
Hier wählt man einen Startpunkt x_n. Desto näher x_n and der Nullstelle ist, desto schneller finden wir sie.

- $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
- $x_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ tatsächliche Nullstelle gefunden

Das ganze könnt ihr wiederhole bis ihr die gewünschte Genauigkeit erzielt habt.

5.3 Banachscher Fixpunkt Satz

Die Idee hinter diesen Verfahren ist den Banachschen Fixpunktsatz zu nutzen um eine Nullstelle zu ermitteln. Hierfür gestalten wir eine zweite Funktion, dessen Fixpunkt an der Nullstelle der zu untersuchenden Funktion ist. Dann kann man einfach iterativ nach dem Fixpunkt suchen für gewünschte Genauigkeit!
Hierfür müssen lediglich ein paar Bedingungen gelten damit es Fixpunkte gibt und genau ein Fixpunkt existiert:

- Raum muss Metrisch sein
- D muss zusammenhängend und kontraktiv sein.
  Kontraktionskante k:$|f'(\tilde{x})| > 1$
- $f : D \to D$ ist geschlossen

Zum untersuchen das dies alles gilt:

- $|f(x) - f(y)| \leq k \cdot |x - y|, \quad \forall x, y \in [a,\ b]$
- $|f'(x)| < k, \quad x \in [a,\ b]$

Gilt all dies, hat die Funktion f genau einen Fixpunkt x mit $x = f(x)$.
$\exists x : f(x) = x$, so könnt ihr eine Funktion $g(x) = f(x) + x$ definieren., welche erneut einen Fixpunkt besitzt, d.h. $\exists x : g(x) = x$.
Es ist offensichtlich, dass für $x_0 \in [a, b], g(x_0) = x_0 \Rightarrow f(x_0) = 0$

Beispiel:
$f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$, gesucht $x_0 \in [1, 2] : f(x_0) = 0$

Ist der Raum metrisch? Ja.

$g(x) = f(x) + x = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{3}{4}$
Ist $g(x)$ kontraktiv?

$g'(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{4}$

$\max\limits_{x \in [1,2]} \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \leq 1 \rightarrow g(x)$ ist kontraktiv

$x_0 = 1$
$x_1 = g(x_0) = \frac{7}{6}$
$x_2 = g(x_1) = 1,2091$
$x_3 = g(x_2) = 1,22047$
$x_4 = g(x_3) = 1,22357$
$x_5 = g(x_4) = 1,22442$
$x_6 = g(x_5) = 1,22466$
$x_7 = g(x_6) = 1,22472$
$\vdots$
exakte Lösung: $\frac{\sqrt{6}}{2} \approx 1,22474$

5.4 Beispielaufgaben

Finden Sie die Nullstelle der Funktion mit einer Genauigkeit von 10^{-3}. Versuchen Sie für jede Funktion die vorgestellten Verfahren anzuwenden.

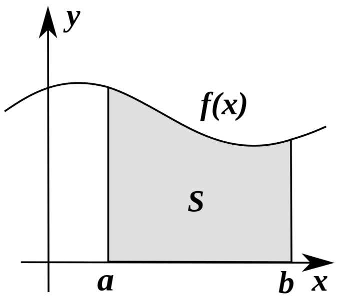
1. $f(x) = x^3 - \sqrt{x^2 + 1}$
2. $f(x) = \sin(x - \frac{x}{3}) - \frac{1}{x}$ (erste pos. NS)
3. $f(x) = \frac{e^{-x}}{3} - \sqrt{x}$

6 Integrale

Die Integralrechnung sollte prinzipiell noch aus der Schulzeit bekannt sein. Prinzipiell geht es bei der Integralrechnung um die Fragestellung der Flächen- und Volumenberechnung.

6.1 Definition

Man unterscheidet zwischen bestimmten und unbestimmten Integralen. Seien $\frac{d}{dx}f(x)$ und $f(x)$ Funktionen, so ist $\int \frac{d}{dx}f(x)dx = f(x) + C, C \in \mathbb{R}$ das unbestimmte Integral der Funktion $\frac{d}{dx}f(x)$.
Wir bezeichnen $f(x)$ in diesem Fall als Stammfunktion.
Wir bezeichnen ein Integral als bestimmt wenn die Grenzen unseres Integrals bekannt sind:
$\int\limits_a^b \frac{d}{dx}f(x)dx = f(x)|_a^b = f(b) - f(a) = y, y \in \mathbb{R}$



Dargestellt: $\int_a^b f(x)dx = S$.

6.2 Integrationsregeln

- $\int c \cdot f(x)dx = c \cdot \int f(x)dx, c \in \mathbb{R}$
- $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
- $\int \frac{\frac{d}{dx}f(x)}{f(x)}dx = \ln(f(x)) + C$
- Partielles Integrieren: $\int\limits_a^b f(x) \cdot g'(x)\,dx = f(x) \cdot g(x)|_a^b - \int\limits_a^b f'(x) \cdot g(x)dx$
- Integration mit Substitution: $\int\limits_a^b f(g(x))dx = \int\limits_{g(a)}^{g(b)} f(t)\frac{dt}{g'(x)}$
  Subst.: $g(x) = t \rightarrow g'(x) \cdot dx = dt \rightarrow dx = \frac{dt}{g'(x)}$
  in anderen "Worten" $\int\limits_a^b f(g(x) \cdot g'(x))dx = \int\limits_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt = F(t)|_{g(a)}^{g(b)} = F(x)|_a^b$

6.3 Spezielle Integrale

- $\int\limits_a^b k \cdot x^h dx = \frac{k \cdot x^{h+1}}{h+1}|_a^b + C$
- $\int\limits_a^b \frac{1}{(a+x)^2}dx = -\frac{1}{x+1}|_a^b + C$
- $\int\limits_a^b \ln(x)dx = x \cdot \ln x - x|_a^b + C$
- $\int\limits_a^b a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}|_a^b + C$

- $\int_a^b \sin(x) \cdot \cos(x) dx = -\frac{1}{2} \cdot \cos^2(x)|_a^b + C$
- $\int_a^b \tan(x) dx = -\ln(x)|_a^b + C$
- Die bekannten Ableitungen (3.3 Standard-Ableitungen) können auch verwendet werden!

6.4 Beispielaufgaben

Bestimmen Sie die folgenden bestimmten und unbestimmten Integrale!
Sie können ihre Lösung mit Hilfe der Ableitung überprüfen!

1. $\int \frac{1}{x \cdot \ln(x)} dx$
2. $\int \frac{(x^2+1)^2}{x^3} dx$
3. $\int_1^e x^2 \cdot \ln x dx$
4. $\int x^2 \cdot e^x dx$
5. $\int \sin(x) \cdot \cos(x) dx$
6. $\int x \cdot \sin(x^2)$
7. $\int x \cdot \sin(x) dx$
8. $\int e^x \cdot \cos(x)$
9. $\int_0^4 \frac{2x+3}{x^2+3x+1} dx$
10. $\int_{-2}^2 (x^3 - x) dx$
11. $\int \ln(x)$

7 Fourier Reihe

Jede (2π-)periodische Funktion kann durch eine kontinuierliche Reihe dargestellt werden. Man unterschiedet zwichen achsensymmetrischen, punksymmetrischen und nicht symmetrische Funktionen. Wenn man Symmetrien frühzeitig entdeckt kann man sich bei der Berechnung der Fourie Reihe viel Arbeit sparen!

7.1 Tools

- $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx))$
- $a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\ dx$
- $a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos(nx)\ dx$
- $b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin(nx)\ dx$
- bei achsen-symmetrie ist $b_n = 0$
- bei punkt-symmetrie is $a_n = 0$

7.2 Tasks

- $f(x) = x \qquad -\pi < x < \pi$
  $b_n = -\frac{2(-1)^n}{n}$;
  $a_0 = 0$;
  $a_n = 0$;
- $f(x) = |x| \qquad -\pi < x < \pi$
  $a_0 = \pi$;
  $a_n = \frac{2((-1))^n - 1}{\pi n^2}$;
  $b_n = 0$;
- $f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < 0 \\ 1 & 0 < x < \pi \end{cases}$
  $a_0 = 1$;
  $b_n = \frac{1-(-1)^n}{\pi n}$;
  $a_n = 0$;
- $f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 < x < 1 \\ -(x^2) & -1 < x < 0 \end{cases}$

Falls nicht 2π die Periode ist, kann man auch mit T allgemein einsetzen:

- $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n \cdot \cos(\frac{2\pi nx}{T}) + b_n \cdot \sin(\frac{2\pi nx}{T}))$
- $a_0 = \frac{2}{T}\int\limits_{-T/2}^{T/2} f(x)\ dx$
- $a_n = \frac{2}{T}\int\limits_{-T/2}^{T/2} f(x) \cdot \cos(\frac{2\pi nx}{T})\ dx$
- $b_n = \frac{2}{T}\int\limits_{-T/2}^{T/2} f(x) \cdot \sin(\frac{2\pi nx}{T})\ dx$